

**José Luis Alfaro Navarro**

**CONTROL ESTADÍSTICO DE LA CALIDAD  
EN PROCESOS MULTIVARIANTES  
AUTOCORRELACIONADOS.  
UNA APLICACIÓN EN LA INDUSTRIA  
CUCHILLERA DE ALBACETE**

I.S.B.N. Ediciones de la UCLM  
978-84-8427-502-2



---

Ediciones de la Universidad  
de Castilla-La Mancha

Cuenca, 2007



**UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA**

Departamento de Economía y Empresa

Área de Estadística

**CONTROL ESTADÍSTICO DE LA CALIDAD  
EN PROCESOS MULTIVARIANTES  
AUTOCORRELACIONADOS.**

**UNA APLICACIÓN EN LA INDUSTRIA  
CUCHILLERA DE ALBACETE.**

**TESIS DOCTORAL**

**JOSÉ LUIS ALFARO NAVARRO**

**ALBACETE, 2005**



**UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA**

Departamento de Economía y Empresa

**FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y  
EMPRESARIALES DE ALBACETE**

**DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA Y  
EMPRESA**

**ÁREA DE ESTADÍSTICA**

**CONTROL ESTADÍSTICO DE LA CALIDAD EN  
PROCESOS MULTIVARIANTES  
AUTOCORRELACIONADOS.**

**UNA APLICACIÓN EN LA INDUSTRIA  
CUCHILLERA DE ALBACETE.**

Memoria presentada para optar al Grado de Doctor  
por D. José Luis Alfaro Navarro, bajo la dirección  
de los Doctores D. José María Montero Lorenzo y  
D. Manuel Vargas Vargas.

Octubre de 2005

*“La calidad nunca es un accidente,  
sino que ésta es siempre el resultado de  
un esfuerzo inteligente”*

*John Ruskin*

*A M<sup>a</sup> Encarnación y a mis padres*

# **Agradecimientos**

A los Doctores D. José María Montero Lorenzo y D. Manuel Vargas Vargas, director de esta Tesis Doctoral, por su dedicación y valiosas aportaciones durante la realización del presente trabajo.

A la Universidad de Castilla-La Mancha y, en particular, a la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de Albacete, por las facilidades y las ayudas recibidas.

A la empresa Hermanos Arcos S.A., ya que sin su ayuda no habría sido posible desarrollar la aplicación práctica de este trabajo.

A mi familia, mis padres Agustín y M<sup>a</sup> Angeles, mi hermana Elena y, en especial, a M<sup>a</sup> Encarnación, cuya comprensión, sacrificio y confianza han sido pagadas con un tiempo que no les he podido dedicar.

A la familia de mi novia, por su apoyo y comprensión durante la última fase de este trabajo.

A los compañeros de la Universidad de Castilla-La Mancha, en especial al Área de Estadística del Departamento de Economía y Empresa y a Juan Francisco Ortega Dato y Gonzalo García Donato-Layrón por sus enseñanzas, aportaciones y apoyo.

A mis amigos, por los consejos recibidos y los buenos momentos que me han hecho pasar durante la realización de este trabajo.

A todos ellos y muchos otros que no he nombrado, ya que sin su apoyo no hubiera podido llegar hasta aquí, gracias.

# ÍNDICE

## CAPÍTULO 0

<b>PLANTEAMIENTO Y OBJETIVOS</b> .....	1
0.1. Planteamiento .....	1
0. 2. Objetivos .....	5

## PRIMERA PARTE

## CAPÍTULO 1

<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	9
1.1. Calidad .....	9
1. 2. Gráficos de control .....	15
1.3. Procesos autocorrelacionados .....	19

## CAPÍTULO 2

<b>GRÁFICOS DE CONTROL UNIVARIANTES</b> .....	25
2.1. Introducción .....	25
2.2. Gráficos Shewhart .....	27
2.3. Gráficos de control de medias móviles exponencialmente ponderadas (EWMA) .....	37
2.4. Gráficos de control de sumas acumuladas (CUSUM) .....	43

**CAPÍTULO 3**

<b>GRÁFICOS DE CONTROL MULTIVARIANTES</b> .....	51
3.1. Introducción .....	51
3.2. Gráficos de control basados en distancias .....	57
3.3. Gráfico MEWMA ( EWMA multivariante) .....	65
3.4. Gráfico MCUSUM (CUSUM multivariante) .....	69
3.5. Problemática de los gráficos de control clásicos .....	75

**SEGUNDA PARTE****CAPÍTULO 4**

<b>MÉTODOS ROBUSTOS EN CONTROL ESTADÍSTICO DE LA CALIDAD</b> .....	85
4.1. Introducción y antecedentes .....	85
4.2. Propiedades en robustez .....	89
4.3. Estimadores robustos .....	97
4.3.1. Estimadores MCD .....	97
4.3.2. Estimadores MVE .....	102
4.3.3. M-Estimadores, L-Estimadores, R-Estimadores y S-Estimadores .....	105
4.3.4. Medias truncadas (trimmed means) .....	110
4.4. Una nueva medida de control multivariante de la calidad: $T^2$ de hotelling robusta .....	115



**CAPÍTULO 5**

<b>TRATAMIENTO CLÁSICO DE LA AUTOCORRELACIÓN EN CONTROL DE LA CALIDAD .....</b>	<b>125</b>
5.1. Introducción .....	125
5.2. Principales trabajos desarrollados para controlar procesos autocorrelacionados .....	129
5.3. Control de la calidad en procesos univariantes autocorrelacionados .....	137
5.4. Modelos de series temporales multivariantes .....	153
5.4.1 Modelos VAR .....	154
5.4.2. Modelos BVAR .....	161
5.4.3. Control de la calidad en procesos multivariantes autocorrelacionados .....	169

**CAPÍTULO 6**

<b>UN NUEVO MÉTODO DE CONTROL PARA PROCESOS MULTIVARIANTES AUTOCORRELACIONADOS .....</b>	<b>173</b>
6.1. Introducción .....	173
6.2. Modelos en espacio de los estados .....	177
6.2.1. Propiedades de los modelos en espacio de los estados .....	179
6.2.2. Determinación de la dimensión del sistema en espacio de los estados .....	182
6.3.3. Estimación de las matrices del sistema .....	190

6.2.4. Estimación del vector de estados e innovaciones del modelo .....	203
6.3. Construcción de gráficos de control basados en modelos en espacio de los estados .....	209

## **TERCERA PARTE**

### **CAPÍTULO 7**

<b>APLICACIÓN PRÁCTICA</b> .....	219
7.1. Descripción del proceso .....	219
7.2. Recogida y tratamiento de la información .....	221
7.3. Tratamiento clásico .....	225
7.4. Una nueva propuesta basada en modelos en espacio de los estados .....	241
7.5. Una nueva alternativa al gráfico de control $T^2$ de Hotelling mediante truncamientos .....	251
7.6. Comparación de resultados y conclusiones .....	255

### **CAPÍTULO 8**

<b>CONCLUSIONES Y LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURA</b> .	259
8.1. Conclusiones .....	259
8. 2. Líneas de investigación futura .....	267

<b>BIBLIOGRAFÍA</b> .....	271
---------------------------	-----

## APÉNDICES

### APÉNDICE A

#### MÉTODOS DE ESTIMACIÓN ..... 305

##### A.1- Estimación por mínimos cuadrados de los valores de un modelo VAR(p) ..... 305

##### A.2- Estimación máximo verosímil de un modelo VAR(p) ... 308

##### A.3- Regresión Cresta y estimación mixta ..... 309

### APÉNDICE B

#### IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO DE ESTIMACIÓN ... 313

##### B.1- Determinación ARL de los gráficos CUSUM y EWMA .. 313

##### B.2- Estimación de la matriz de Hankel ..... 315

##### B.3- Determinación del número de estados ..... 316

##### B.4- Estimación del modelo en espacio de los estados ..... 317

### APÉNDICE C

#### RESULTADOS DE LA ESTIMACIÓN ..... 321

##### C.1- Datos Originales ..... 321

##### C.2- Residuos procedentes de la modelización independiente de cada variable ..... 324

##### C.3- Residuos VAR (1) ..... 327

##### C.4- Matrices estimadas del modelo ..... 330

##### C.5- Innovaciones estimadas del modelo ..... 331

##### C.6- Estados estimados del modelo ..... 334

## **CAPÍTULO 0**

### **PLANTEAMIENTO Y OBJETIVOS**

#### **0.1. PLANTEAMIENTO**

El doctorando presenta el trabajo de investigación titulado: “Control estadístico de la calidad en procesos multivariantes autocorrelacionados. Una aplicación en la industria cuchillera de Albacete” para la obtención del grado de Doctor, dentro del Área de Economía Aplicada del Departamento de Economía y Empresa, en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de Albacete, perteneciente a la Universidad de Castilla-La Mancha. Su objetivo principal consiste en la propuesta de una metodología que permita un adecuado tratamiento de la información estadística utilizada en los gráficos de control estadístico de la calidad. En concreto, dentro de un enfoque multivariante, este trabajo se centrará en el estudio de los métodos robustos y el tratamiento de series temporales para solventar algunas de las dificultades que presentan los gráficos de control de forma más habitual en la práctica.

Aunque la preocupación por la calidad de los productos manufacturados es antigua, en sus orígenes el control de la calidad residía en la habilidad del individuo para fabricar productos de forma semejante a un “*producto tipo o estándar*”, siendo interpretada la variación respecto a él como un error. Como se puede apreciar, se planteaba una manufacturación individualizada, sin referencia ninguna a un colectivo de productos, por lo que el concepto de control de calidad estaba centrado exclusivamente en el control técnico de la fabricación de cada unidad.

La revolución industrial y la producción en masa supuso la introducción plena de la producción mediante el ensamblaje de piezas más simples fabricadas de forma independiente, pero la filosofía de fabricación continuó siendo, durante un tiempo, la de “*producción exacta*”, atribuyendo la variabilidad a defectos en el proceso productivo. Durante el siglo XIX se empieza a tomar conciencia de que no es necesario que las piezas fabricadas sean *exactamente* iguales, sino que basta con que sean *suficientemente* parecidas como para considerarlas válidas, situación económica y técnicamente menos costosa. Este cambio supone el reconocimiento, más o menos explícito, de la existencia de variabilidad en la producción e introduce el uso de métodos estadísticos en el control de calidad.

El primero en aplicar métodos estadísticos al control de calidad fue Walter A. Shewhart, en los laboratorios Bell Telephone, en el primer cuarto del s. XX, seguido de un gran impulso en este campo tras la segunda guerra mundial. Pero no es hasta el último cuarto del siglo, con la publicación de las normas ISO 9000<sup>1</sup> y el aumento de la competencia entre empresas, cuando la calidad cobra un papel muy importante dentro de la empresa. Esta calidad se convierte en un elemento vital, ya que es considerada de primordial importancia para obtener ventajas

---

<sup>1</sup> Normas de la Organización Internacional de Normalización. Dado que los protocolos de ISO requieren que todas las normas sean revisadas al menos cada cinco años, la última versión corresponde al año 2000, dando lugar a las conocidas como normas UNE-EN ISO 9000, que es la versión española de las normas ISO 9000.

competitivas (frente a la variable precio, que ha perdido importancia) respecto al resto del sector.

Dentro del enfoque estadístico del control de calidad, las técnicas utilizadas, y concretamente los gráficos de control, elemento fundamental de este trabajo, están basadas en las suposiciones de independencia y normalidad de las observaciones. En la práctica, estas suposiciones no suelen cumplirse. En cuanto a la suposición de normalidad, aunque no suele darse de una forma exacta, es cierto que la información obtenida de la mayoría de procesos de producción presenta un comportamiento aproximadamente normal; además, como se señala en distintos trabajos<sup>2</sup>, el comportamiento de los gráficos de control va a ser adecuado salvo en casos extremos de no normalidad. Por otro lado, la violación del supuesto de independencia debida a autocorrelación muestral<sup>3</sup> suele tener efectos más perniciosos sobre el comportamiento de los gráficos de control, manifestándose fundamentalmente en un aumento de la probabilidad de error de tipo I en los contrastes asociados a los gráficos de control, lo que supone un aumento del número de falsas alarmas.

Tras analizar las distintas líneas de investigación existentes para paliar el efecto de la autocorrelación, hemos podido observar que los desarrollos están centrados en una óptica univariante. Normalmente se recurre a la modelización ARIMA de series temporales y al uso de los residuos en los gráficos de control. Así, en el caso multivariante, sería necesario modelizar individualmente cada variable y utilizar los residuos, bien por separado o bien de forma conjunta, para llevar a cabo el control de la calidad. Esta situación supone la obtención de una serie de observaciones incorreladas, pero perdiendo la información sobre la correlación cruzada, pieza valiosa en muchos procesos.

---

<sup>2</sup> Estos trabajos van a ser recogidos en la parte final del capítulo 3.

<sup>3</sup> En el caso multidimensional, la presencia de correlación cruzada sólo supone la inadecuación de utilizar gráficos individuales frente a la alternativa de gráficos de control multivariantes.

El enfoque más adecuado consiste en la modelización multivariante de series temporales. Dentro de esta óptica, los modelos más conocidos son la extensión multivariante de los modelos ARMA, denominados VARMA. Sin embargo, presentan problemas asociados al gran número de parámetros que hay que estimar y a la posible presencia de cointegración entre las variables. Esta situación hace necesario un gran número de observaciones para ajustar el modelo de forma correcta, situación normalmente costosa, tanto en términos económicos como en tiempo y recursos. Una alternativa a esta metodología para paliar el efecto negativo de la autocorrelación no inherente al proceso<sup>4</sup>, puede ser la modelización en espacio de los estados. Esta metodología permite, por un lado, la eliminación de la autocorrelación y, por otro lado, utilizar todas las variables relevantes para la calidad y reducir la dimensión mediante la utilización de los estados obtenidos en el modelo. En el primer caso, vamos a conseguir eliminar el efecto pernicioso de la autocorrelación, sin perder la óptica multivariante y mitigando los problemas de sobreparametrización de la metodología VARMA. En el segundo caso, estas técnicas permiten utilizar información sobre una gran cantidad de variables y poder llevar a cabo una reducción de la dimensión mediante los estados, en el caso de existir una relación significativa entre ellas.

Otro aspecto de los gráficos de control que va a ser analizado en este trabajo consiste en la aplicación de métodos robustos en control estadístico de la calidad. Concretamente vamos a proponer el desarrollo de una metodología estadística, consistente en la sustitución de las estimaciones clásicas de los parámetros por estimaciones robustas que presenten menos sensibilidad ante la presencia de observaciones atípicas y que evite la aparición de tediosos cálculos iterativos para obtener estimaciones finales de los parámetros. Esta sustitución se va a llevar a cabo de una forma novedosa utilizando como estimadores robustos los estimadores procedentes de la familia denominada medias truncadas.

---

<sup>4</sup> Es importante hacer este matiz, ya que hacemos referencia a la eliminación de la autocorrelación que se puede introducir en la recogida o manipulación de la información. La posible autocorrelación inherente al proceso de producción debe ser estudiada, ya que en muchos casos es una fuente de información valiosa.

Este trabajo quedaría incompleto si no se llevara a cabo una aplicación que permitiera comprobar la utilidad de este procedimiento en la práctica. Para ello estudiaremos el uso de gráficos de control en un proceso de fabricación de cuchillos jamoneros. Concretamente, nos centraremos en el análisis de cinco variables relacionadas con el grosor de la hoja del cuchillo, ya que constituyen las características fundamentales que le dan a estos cuchillos las cualidades diferenciadoras respecto a los cuchillos convencionales y les permite adquirir el comportamiento requerido para desarrollar el corte de forma adecuada.

## **0. 2. OBJETIVOS**

Tras haber justificado el interés del presente estudio, se van a recoger de forma resumida los objetivos, tanto metodológicos como empíricos que se pretenden alcanzar:

a) Exposición de los fundamentos estadístico-matemáticos de los gráficos de control como métodos estadísticos de control de la calidad, analizando los principales desarrollos existentes desde un punto de vista univariante y multivariante.

b) Descripción y análisis de los principales problemas existentes en la aplicación práctica de los gráficos de control clásicos, centrándonos en el efecto pernicioso que supone el incumplimiento de las hipótesis de partida, con mayor atención en el incumplimiento de la suposición de independencia como consecuencia de la aparición de autocorrelación muestral.

c) Análisis de los principales métodos robustos de estimación existentes como una forma de agilizar el procedimiento de ajuste de los gráficos de control. En este caso haremos especial incidencia en la utilización de estos métodos para



obtener estimaciones en la fase I del análisis sin necesidad de desarrollar tediosos cálculos iterativos.

d) Desarrollo de una alternativa robusta al clásico gráfico de control  $T^2$  de Hotelling, diseñando un gráfico de control que conserve las buenas propiedades estadísticas y operativas de los gráficos de control clásicos, pero utilizando estimadores robustos de posición y escala.

e) Análisis de las principales soluciones dadas en la literatura especializada al problema de la existencia de autocorrelación, analizando los principales inconvenientes de estas soluciones, sobretudo los relacionados con la ausencia de un enfoque multivariante y el comportamiento pobre ante autocorrelación positiva.

f) Análisis de la especificación y estimación de procesos estacionarios en espacio de los estados, incidiendo en el mejor comportamiento de esta modelización respecto a la clásica modelización VAR, tanto como técnica para reducir la dimensión como para paliar el efecto negativo de la existencia de autocorrelación.

g) Elaboración de un nuevo procedimiento de control de calidad que nos permita llevar a cabo un control más realista ante situaciones con una gran autocorrelación en la información muestral.

h) Contrastación empírica de la metodología propuesta mediante la aplicación en un proceso productivo de cuchillos jamoneros en el que la información ha sido recogida con la intención de incluir autocorrelación en la muestra.

# **PRIMERA PARTE**

# **CAPÍTULO 1**

## **INTRODUCCIÓN**

### **1.1. CALIDAD**

La palabra calidad es utilizada por muchas personas en contextos diferentes. En la mayoría de empresas se considera que la calidad de un producto (o servicio)<sup>5</sup> es un elemento importante. Esta importancia ha aumentado como consecuencia de la creación de la normativa internacional en calidad (normas ISO) y el aumento de la competencia existente en la mayoría de sectores productivos. Sin embargo, es un concepto tan amplio que resulta muy difícil dar una definición general que diferencie de forma clara entre un producto de mala calidad y otro de alta calidad. Por ello, son diversas las definiciones que aparecen en la bibliografía sobre este tema.

---

<sup>5</sup> A partir de ahora vamos a hablar de producto, si bien, las consideraciones que hagamos se pueden extender de forma sencilla a los servicios.

Shewhart (1931) llegó a la conclusión que hay dos aspectos claves e independientes en la consideración de calidad de un producto: un aspecto objetivo, que resulta de la medición de características físicas, y un aspecto subjetivo, relacionado con las expectativas y sentimientos de las personas. Aunque el propio Shewhart reconoce que este lado subjetivo de la calidad es muy interesante desde un punto de vista comercial, su trabajo se centra en el establecimiento de estándares de calidad de forma cuantitativa y objetiva. En la otra vertiente del término calidad se sitúa Deming que, además de analizar la calidad desde un punto de vista subjetivo, considera que este atributo no es estático sino que cambia a lo largo del tiempo, adaptándose a las nuevas expectativas de los consumidores, por lo que afirma Deming (1986): “Quality can be defined only in terms of the agent”.

En Crosby (1979) la calidad es definida como “conformidad a los requisitos”; desde este punto de vista, un producto es de buena calidad si cumple las especificaciones previamente establecidas. Esta definición incluye una parte importante de lo que los consumidores perciben como calidad, de tal forma que un fabricante va a recibir quejas respecto a la calidad de sus productos cuando éstos no cumplan las expectativas de los consumidores.

En Juran y Gryna (1988) aparece otra definición, considerando que: “La calidad es aptitud para el uso”. Aparece así la relatividad de este concepto, ya que lo hace depender tanto del producto como del uso que se haga de él. En este segundo aspecto incide Montgomery (1996), que considera la calidad como conformidad con los requisitos establecidos en función del uso que se haga del producto, dejando en un segundo plano el aspecto relacionado con el diseño del producto, es decir, la conformidad entre éste y el proceso de fabricación.

Estas definiciones son consideradas tradicionales y descartan la idea de que la calidad de un producto o servicio sea simplemente una característica identificable. Garvin (1987) distingue ocho dimensiones de calidad, que cuando se consideran de forma conjunta incorporan más aspectos que las definiciones

tradicionales, y constituyen la respuesta a cuestiones básicas que se puede presentar en torno a la calidad del producto:

1. Funcionamiento (¿cumple el producto con el objetivo previsto?). Es una de las medidas clásicas de la calidad, ya que los consumidores normalmente evalúan un producto determinando si cumple ciertas funciones específicas como esperan.

2. Características (¿qué hace el producto?). Es un aspecto importante ya que los clientes atribuyen mayor calidad cuando el producto presenta más características que las básicas para cumplir con su función. Por ejemplo, un paquete informático de hoja de cálculo se considera de calidad superior si tiene recogidas funciones de análisis estadístico que sus competidores no incluyen.

3. Fiabilidad (¿con qué frecuencia falla el producto?). Un producto fiable es aquél que raramente falla, aspecto relacionado con la consideración de que está libre de deficiencias, lo que contribuye a su percepción como de calidad.

4. Durabilidad (¿cuánto tiempo dura el producto?). Es una medida de la vida de servicio efectivo del producto; lógicamente, los consumidores están interesados en que el producto se comporte de forma satisfactoria cuanto más tiempo mejor, lo que es percibido también como calidad de éste.

5. Conformidad con los estándares (¿está el producto elaborado de acuerdo con los estándares fijados en el diseño?). Se refiere al grado en que un producto cumple los requisitos preestablecidos. Esta dimensión de la calidad es muy importante en situaciones donde el producto es un input dentro de un proceso de fabricación más complejo. Las especificaciones de los componentes individuales son establecidas normalmente en términos de un valor objetivo y una tolerancia.

6. Facilidad de servicio (¿es sencillo (en tiempo y dinero) reparar el producto?). Hay muchas industrias en las que la percepción del cliente sobre la

calidad depende de la rapidez y la economía con que puede llevarse a cabo el mantenimiento o la reparación del producto.

7. Estética (¿cómo es la apariencia del producto?). Se trata de una dimensión subjetiva que tiene en cuenta las características visuales del producto, considerando aspectos como estilo, color, forma, alternativas de embalaje, características táctiles y otras características sensoriales. Al estar relacionada con las preferencias individuales de los consumidores, es un aspecto difícil de determinar pero cada vez más importante dentro de la estrategia de las empresas.

8. Calidad atribuida a priori (¿cuál es la reputación de la compañía o de su producto?). Cuando los consumidores no tienen una información completa sobre el producto pueden condicionar la calidad del mismo a aspectos tales como experiencias pasadas, la reputación del fabricante o el propio nombre del producto.

Dada la multidimensionalidad del concepto de calidad, su análisis no debería limitarse a una faceta sino que es necesario considerar varios niveles simultáneamente. Habitualmente, las empresas no abordan con igual intensidad las ocho dimensiones mencionadas, sino que se centran en algunas de ellas para obtener ventajas competitivas, lo que tiende a difuminar el concepto de calidad y complica una definición general de ésta.

Tradicionalmente, los departamentos de control de la calidad de las empresas centraban sus esfuerzos en el cumplimiento de los estándares de calidad establecidos, ya que su principal cometido era asegurarse del cumplimiento de dichos estándares, que adoptan la forma de límites de especificación. Sullivan (1984) considera que la conformidad con los límites de especificación conduce a la obtención de productos de calidad, pero incide negativamente en la mejora de ésta, ya que mientras todos los resultados del proceso de producción estén dentro de los límites especificados va a ser difícil que se lleven a cabo inversiones para mejorar la calidad. En este sentido, Sullivan (al igual que Deming y Taguchi) considera que había que definir la calidad como “uniformidad alrededor del

objetivo”, de tal forma que cualquier desviación del valor objetivo va a suponer una mayor desconfianza de los clientes y un incremento de costes. De esta forma, la calidad no estará centrada sólo en la obtención de productos que cumplan los límites especificados sino en la mejora continua de la calidad, con el objetivo de reducir las variaciones alrededor del valor objetivo establecido.

Esta relación se resume en la afirmación de Montgomery (2004): “Quality is inversely proportional to variability”. Se introduce así un elemento (la variabilidad) básico en la aplicación de la estadística en la mejora de la calidad, ya que si la variabilidad respecto a una o varias características de calidad es grande, la calidad del producto disminuye. En este sentido, una reducción de la variabilidad existente en el proceso de producción es considerada también como una mejora de la calidad. Esta concepción moderna ha supuesto el desarrollo de distintas técnicas de control estadístico de la calidad, entre las que se encuentran los gráficos de control<sup>6</sup>, objeto de análisis en este trabajo.

Hay que tener en cuenta que en la mayoría de organizaciones resulta difícil y costoso ofrecer al cliente productos con características de calidad que sean siempre idénticas de una unidad a otra o que estén en niveles que cumplan con las expectativas del consumidor. La razón principal para ello es la variabilidad que sólo puede describirse en términos estadísticos. Por ello los métodos estadísticos van a jugar un papel fundamental en los esfuerzos por mejorar la calidad. En este trabajo, vamos a adoptar la definición de calidad dada por Montgomery que relaciona la calidad de forma inversa con la variabilidad y, por lo tanto, el objetivo perseguido con los métodos estadísticos desarrollados en este trabajo es la mejora de la calidad a través de la reducción de la variabilidad. De esta forma, solamente cubrimos uno de los muchos aspectos relacionados con la calidad, pero sin duda alguna, podemos obtener una contribución a la mejora de la calidad considerable.

---

<sup>6</sup> Dentro de estos gráficos de control nos vamos a centrar en los diseñados para características cuantitativas del producto (gráficos de control para variables).

## 1. 2. GRÁFICOS DE CONTROL

Los gráficos de control, desarrollados originalmente por Walter A. Shewhart en los años 20, se han convertido en una herramienta básica para llevar a cabo el control de la calidad de los productos, al servir para definir los límites y parámetros óptimos en el proceso. Se trata de un instrumento de apoyo para alcanzar los objetivos perseguidos y para poder evaluar el comportamiento del proceso. Usados también para reducir la variabilidad en la producción, están basados en la clasificación de las causas de variación que pueden aparecer en el proceso en dos grupos: causas de variación comunes y especiales<sup>7</sup>. Las causas de variación comunes no pueden ser eliminadas sin una revisión profunda del proceso, al ser una variación inherente, y aparecer de forma frecuente. Además, el efecto conjunto de estas causas de variación se puede predecir en base a la experiencia pasada (siempre en términos probabilísticos). El segundo grupo de causas de variación no son parte del proceso y ocurren de forma accidental; además, suelen tener un efecto grande sobre el proceso productivo. Este tipo de causas se pueden eliminar sin llevar a cabo una revisión profunda del proceso y, en la mayoría de los casos, los operarios están formados para reconocerlas y eliminarlas. Los gráficos de control se diseñan para discriminar entre ambos tipos de variaciones; en el caso de que sólo existan causas comunes el proceso se considera bajo control<sup>8</sup>, significando que el proceso es predecible dentro de unos límites estadísticos. En palabras de Shewhart (1927): “.... a phenomenon will be said to be controlled when, through the use of past experience, we can predict, at least within limits, how the phenomenon may be expected to vary in the future. Here it is understood that prediction within limits means that we can state, at least approximately, the probability that the observed phenomenon will fall within the given limits”.

---

<sup>7</sup> Esta terminología es debida a Deming (1986), ya que originalmente Shewhart las denominó causas ocasionales de variación (chance causes of variation) y causas asignables (assignable causes) respectivamente.

<sup>8</sup> Por contra, cuando aparecen causas especiales de variación el proceso se considera fuera de control.



Los gráficos de control están basados en la idea de que si el proceso se encuentra bajo control, el comportamiento del mismo es predecible en base a las observaciones previas. De esta forma, para unos límites dados, es posible determinar la probabilidad de que futuras observaciones estén dentro de esos límites. En su forma original, los gráficos de control son una representación a lo largo del tiempo de la información disponible del proceso, en el caso de tener observaciones individuales, o de un estadístico resumen de la información en el caso de tener observaciones agrupadas en subgrupos. Estos valores son comparados con unos límites que indican una banda de variación en el comportamiento del proceso debida a la presencia de causas comunes. Un punto fuera de estos límites se considera una señal de una situación fuera de control e indica que existe más variación que la esperada si sólo existieran causas comunes de variación<sup>9</sup>.

En aplicaciones de control de calidad es habitual asumir que las sucesivas observaciones de la característica de calidad,  $X_t$ , pueden ser modelizadas mediante distribuciones normales independientes,  $X_t \sim N(\mu_t, \sigma_{X_t}^2)$ , donde el subíndice  $t$  indica que la media y la desviación típica de las observaciones pueden cambiar en el tiempo debido a la presencia de causas especiales de variación. Con estos supuestos, el proceso va a estar bajo control si y sólo si  $\mu_t = \mu$  y  $\sigma_{X_t}^2 = \sigma_X^2$ , constantes para cualquier momento del tiempo  $t$ . Por este motivo, los procesos de producción son controlados normalmente usando dos gráficos, uno para controlar la variabilidad y otro para controlar la media del proceso.

El control de la media o variabilidad del proceso está basado en información muestral que, usualmente, se estructura en subgrupos denominados racionales<sup>10</sup>. Las observaciones incluidas en cada subgrupo estarán producidas bajo las mismas condiciones, en las que sólo existen causas comunes de variación. Por contra, las

---

<sup>9</sup> Estos límites de control no deben confundirse con los límites especificados por el fabricante, a los que denominaremos tolerancias. Se trata de límites relacionados con la variabilidad estimada para el proceso si solamente se producen causas comunes de variación.

<sup>10</sup> El caso de manejar observaciones individuales estaría considerado como subgrupos de tamaño 1.

causas especiales incidirán exclusivamente en la variación que se produce entre grupos<sup>11</sup>. Se dice entonces que se dispone de un conjunto de  $m$  muestras formadas por  $n$  observaciones cada una, utilizando en los gráficos de control estadísticos que resuman la información de cada subgrupo.

En la elaboración de un gráfico de control se diferencian dos etapas: un período base y un período de vigilancia<sup>12</sup>. En la primera etapa se estiman los parámetros necesarios en la elaboración del gráfico de control, de tal forma que se establece una región de aceptación y una zona de rechazo basadas en un contraste de hipótesis sobre los valores de los parámetros. En la segunda etapa, con los valores estimados en el período anterior, se construye el gráfico de control y se analiza si, a medida que se generan nuevas observaciones, el proceso sigue encontrándose bajo control.

En este trabajo nos centraremos básicamente en el período base, donde se lleva a cabo la estimación de los parámetros y fijación de los límites de control, al ser la fase donde las técnicas estadísticas tienen mayor impacto. Concretamente, abordaremos dos aspectos básicos; por un lado, se analizará una metodología de estimación de los parámetros del gráfico de control basada en estadística robusta, que permita solventar los problemas asociados con la sensibilidad del método clásico de estimación ante una excesiva variabilidad de las observaciones, concepto que se matizará y definirá posteriormente. Por otro lado, estudiaremos el efecto que la violación del supuesto de independencia entre observaciones causa en los gráficos de control; en concreto, la existencia de autocorrelación muestral en la información estadística altera las propiedades de estos gráficos, invalidando parcialmente sus resultados y precisando una reelaboración que tenga presente dicho fenómeno. Por ello, en el siguiente epígrafe se detallarán las particularidades

---

<sup>11</sup> Esto hace que, en la práctica, se preste más atención a los gráficos de control de la media del proceso, donde se refleja la existencia de causas específicas de variación. Los gráficos de variabilidad se limitan entonces a controlar que la variabilidad inherente al proceso se mantenga en los valores prefijados.

<sup>12</sup> En algunos manuales de control estadístico de la calidad se usa el concepto de fase I y fase II respectivamente.

estadísticas de los procesos autocorrelacionados y su influencia sobre los gráficos de control

Por último, se distingue entre gráficos de control univariantes y multivariantes, dependiendo del número de características de calidad analizadas simultáneamente. Originalmente contruidos para una variable, la extensión de los gráficos de control a un esquema multivariante no es inmediata ni está exenta de ciertas dificultades. El planteamiento univariante está mucho más estudiado en la bibliografía especializada, y debe ser un punto de partida para el caso multivariante que debe abordar tanto la problemática presente en el esquema anterior como la propia de la existencia de correlación cruzada entre las variables y su modelización conjunta. Por ello, aunque este trabajo abordará también la óptica univariante, el objetivo fundamental estará en desarrollar técnicas estadísticas adecuadas dentro de un marco multidimensional.

### **1.3. PROCESOS AUTOCORRELACIONADOS**

Una suposición básica en los gráficos de control clásicos, que van a ser analizados en el segundo capítulo de este trabajo, es considerar que las observaciones disponibles son independientes y normalmente distribuidas. La suposición de independencia, estándar en la literatura de control estadístico de procesos, va a ser incumplida de forma cada vez más frecuente en la práctica. Este mayor incumplimiento en la actualidad viene motivado, en algunas ocasiones, por la presencia de equipos de medición más sofisticados, que permiten obtener un mayor volumen de información en un intervalo de tiempo más pequeño, favoreciendo la aparición de autocorrelación en las observaciones. En otros casos, la autocorrelación va a ser un comportamiento inherente al proceso, que debe ser asumido como un elemento más en su modelización y análisis. En este trabajo nos centraremos en la presencia de autocorrelación introducida al captar la información (autocorrelación muestral), es decir, una autocorrelación que no es propia del proceso y que produce un comportamiento errático del gráfico de control.

Así, atendiendo al comportamiento de las observaciones, el proceso puede ser:

- Estacionario e incorrelado, en cuyo caso los datos carecen de memoria, lo que supone que las observaciones previas no influyen en las observaciones futuras y el proceso fluctúa de forma aleatoria alrededor de su media. Es el supuesto clásico para los gráficos de control y, en caso de incumplirse, habitualmente se busca un tratamiento estadístico de la información que reconduzca a este caso.

- Estacionario y correlacionado de forma negativa. Una observación inferior al valor medio es frecuentemente seguida por una observación cuyo valor es superior a la media y viceversa. La secuencia de observaciones presenta un comportamiento alternante, pero sin desviarse constantemente del valor medio.

- Estacionario y correlacionado positivamente, caracterizado por rachas de observaciones situadas en valores superiores o inferiores a la media del proceso. Este tipo de correlación serial es la más habitual en la práctica y considerada como situación fuera de control desde los inicios del uso de gráficos de control (en concreto, aparece dentro de las famosas reglas de la Western Electric Company, o reglas WECO).

- No estacionario, donde se producen desviaciones de la media sin volver al valor de la misma. La solución clásica en este caso ha sido eliminar esta no estacionariedad de las observaciones originales y aplicar técnicas de control estadístico de procesos a los residuos (ya estacionarios) obtenidos.

Cuando las observaciones presentan un comportamiento autocorrelacionado, es muy importante decidir qué parte de la variabilidad forma parte del comportamiento normal del proceso y qué parte es atribuible a causas especiales. En este sentido Gilbert, Kirby y Hild (1997) establecen: “For example, if autoregressive behaviour is a normal, unchangeable part of the process, then a chart that gives out of control signals because of the presence of autocorrelation is not very useful. On the other hand, if autocorrelation in a process is a symptom of a problem that should be addressed, then the control chart should detect the presence of the autocorrelation”.

Por lo tanto, la definición de la situación considerada como bajo control no debe de ir asociada a un comportamiento independiente de las observaciones sino a un comportamiento predecible del proceso en base a la información pasada. Obviamente el comportamiento de procesos con la presencia de cierto grado de autocorrelación también va a ser predecible y es posible extender la definición de un proceso bajo control en este caso. En este sentido, Alwan (1988) considera este proceso como un proceso “bajo control en sentido amplio”.

Para analizar el comportamiento de estos procesos autocorrelacionados han sido propuestas en la literatura especializada dos alternativas univariantes: la utilización de límites de control empíricos y la modelización de la información

mediante modelos de series temporales. En el primer caso se establecen los límites de control en función del comportamiento deseado del gráfico en términos de recorrido medio de racha (ARL). Por contra, cuando se recurre a modelos de series temporales, se ajusta el modelo correspondiente y se aplican las técnicas clásicas de control de la calidad sobre los residuos de estas series. Éstos, si el modelo ha sido ajustado de forma adecuada, presentarán un comportamiento incorrelado y aproximadamente normal, por lo que van a cumplir las suposiciones básicas de los gráficos de control clásicos. Estas técnicas presuponen que la muestra disponible corresponde a una realización de un proceso estocástico subyacente.

Aunque la determinación general de las características de un proceso estocástico se basa en las funciones de distribución conjunta de las variables, bajo el supuesto de normalidad es equivalente establecerlas a partir del cálculo de los momentos de primer y segundo orden, óptica habitual en control estadístico de la calidad. Así, se debe verificar:

1. El valor de la media debe ser finito en función del tiempo.

$$E(x_t) = \mu_t$$

2. Existe la matriz de varianzas-covarianzas, que tendrá la forma:

$$\gamma_{t,t+k} = \text{Cov}(x_t, x_{t+k}) = E[(x_t - \mu_t)(x_{t+k} - \mu_{t+k})]$$

donde se recoge la relación entre las sucesivas realizaciones del proceso. Una alternativa equivalente para analizar los momentos de segundo orden son los coeficientes de autocorrelación:

$$\rho_{t,t+k} = \frac{\gamma_{t,t+k}}{\sqrt{\gamma_{t,t}} \sqrt{\gamma_{t+k,t+k}}} \quad -1 < \rho_{t,t+k} < 1$$

Estos procesos estocásticos se denominan estacionarios en sentido estricto cuando las funciones de distribución de probabilidad son las mismas con independencia del momento histórico considerado. Este requisito es muy estricto y de difícil verificación en la práctica, por lo que se recurre a un segundo enfoque, conocido como estacionariedad en sentido amplio, equivalente al primero bajo normalidad. En este caso, un proceso se considera estacionario en media si se verifica que:

1. La media del proceso permanece constante a lo largo del tiempo, es decir, toma el mismo valor con independencia del momento del tiempo en el que estemos situados:

$$E(x_t) = \mu$$

2. La varianza es finita y constante a lo largo del tiempo:

$$E[(x_t - \mu)^2] = \sigma^2 < \infty$$

3. La autocovarianza depende únicamente del lapso temporal entre variables y no del momento del tiempo en el que estemos situados:

$$\text{Cov}(x_t, X_{t+k}) = E[(x_t - \mu)(x_{t+k} - \mu)] = \gamma_k$$

En este estudio solamente vamos a considerar estacionariedad en sentido amplio, ya que en la mayoría de las aplicaciones prácticas las series son estacionarias o fácilmente transformables en estacionarias<sup>13</sup>.

En el caso de que el proceso no sea estacionario, algunos autores proponen el uso de lo que se conoce como control ingenieril de procesos o control automático de procesos (Engineering Process Control (EPC) o Automated Process Control (APC), que combina un control activo con gráficos de control y para el que es necesario tener un gran conocimiento del proceso que se está analizando. Aunque este tipo de control también puede mejorar la aplicación cuando el proceso presenta

---

<sup>13</sup> Implícitamente asumimos que los procesos son ergódicos, condición necesaria para una estimación consistente de los momentos a partir de una única realización del proceso estocástico.

autocorrelación, en este trabajo nos decantaremos por el tratamiento estadístico de series temporales para eliminar su efecto. Este enfoque permite, por un lado, disminuir la variabilidad al eliminar las variaciones debidas a la autocorrelación y, por otro, garantizar el supuesto de independencia de los residuos, permitiendo el uso de las técnicas clásicas de control estadístico de la calidad.

El resto del estudio se planteará en tres partes diferenciadas. Dentro de esta primera parte, esbozaremos el planteamiento actual de los gráficos de control. Así, en el capítulo segundo, expondremos los gráficos de control desde la óptica univariante, presentando su desarrollo y características más relevantes, comenzando con los gráficos tipo Shewhart, su planteamiento y propiedades. Como solución parcial a algunas de sus deficiencias, analizaremos también los gráficos de medias exponencialmente ponderadas (EWMA) y los de sumas acumuladas (CUSUM). El capítulo tres lo dedicaremos a los gráficos de control multivariantes, desarrollando la extensión de los gráficos del capítulo anterior, y destacando las ventajas de un planteamiento multidimensional. Acabaremos este capítulo con una reflexión sobre las limitaciones de los gráficos clásicos y encuadrando las novedades metodológicas que se abordarán posteriormente.

La segunda parte de este trabajo se centrará en dos aspectos de los gráficos de control, proponiendo desarrollos novedosos en la metodología estadística de éstos que mitiguen deficiencias en el planteamiento clásico. En el capítulo cuatro presentaremos una aplicación de los métodos robustos en control estadístico de la calidad. En concreto, abordaremos una alternativa a la estimación clásica de los parámetros en el periodo base que, desde un planteamiento robusto, presente menos sensibilidad ante observaciones atípicas y no precise de tediosos cálculos iterativos para obtener las estimaciones finales de los parámetros. El capítulo cinco analiza la problemática existente en los gráficos de control clásicos ante la presencia de autocorrelación muestral. Esta problemática, junto con los desarrollos metodológicos existentes, siempre desde una óptica univariante, aparecen recogidos en este capítulo. La última parte del mismo pretende ser una recopilación de los desarrollos univariantes existentes en la literatura para abordar el problema de la



autocorrelación muestral. El capítulo seis pretende aportar un nuevo enfoque que mejore el tratamiento de la autocorrelación muestral. Desde una óptica multivariante, analizaremos la representación de series temporales en espacio de los estados, modelización formalmente equivalente a la habitual VARMA, pero que presenta ventajas analíticas y numéricas que la hacen atractivas en control estadístico de la calidad.

En la tercera parte se desarrollará una aplicación práctica de la metodología desarrollada al control de la calidad de la hoja de cuchillos jamoneros. Aparte de la importancia que la industria cuchillera tiene en Albacete, las características técnicas de este proceso lo hacen idóneo para constatar las propiedades de los algoritmos desarrollados. La necesidad de un enfoque multivariante, con cinco medidas para definir la calidad de la hoja del cuchillo, la sensibilidad de éstas ante leves variaciones muestrales y la autocorrelación existente en el proceso, no contaminada por una correlación cruzada excesiva, sirven como banco de pruebas para los desarrollos teóricos de este trabajo.

Por último, se resumen las conclusiones de este trabajo, destacando las aportaciones que se realizan al control estadístico de la calidad y exponiendo las líneas de investigación que quedan abiertas en los temas tratados.

## **CAPÍTULO 2**

### **GRÁFICOS DE CONTROL UNIVARIANTES**

#### **2.1. INTRODUCCIÓN**

En este capítulo analizamos los gráficos estadísticos de control de mayor aceptación y aplicación en la práctica, como son los gráficos tipo Shewhart, los de medias móviles exponencialmente ponderadas (EWMA) y los de sumas acumuladas (CUSUM). En todos los casos vamos a asumir que la información viene estructurada en subgrupos racionales, lo que no supone pérdida de generalidad, ya que el caso de observaciones individuales puede considerarse como el caso particular de subgrupos de tamaño uno<sup>14</sup>.

Los gráficos de control propuestos por Shewhart son los más usados debido a su sencillez y a que presentan un comportamiento adecuado en la detección de cambios de gran magnitud (cambios de más de dos desviaciones típicas en la media

---

<sup>14</sup> Salvo para el cálculo de medidas de variabilidad dentro de cada subgrupo, para lo que habrá que recurrir a la agrupación de observaciones consecutivas.

del proceso). Por otro lado, los gráficos de control EWMA y CUSUM mejoran el comportamiento de los gráficos Shewhart en la detección de cambios de pequeña magnitud, al considerar en cada instante toda la información pasada del proceso.

Vamos a suponer que la característica de calidad ( $X$ ) viene medida a través de un proceso estocástico estacionario donde las observaciones van a ser independientes y normalmente distribuidas, con media  $\mu_x$  y desviación típica  $\sigma_x$  ( $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ ). De esta forma, vamos a considerar un conjunto de  $m$  muestras formadas por  $n$  observaciones cada una.

Como marco general, un gráfico de control consiste en la representación gráfica de algún estadístico muestral dentro de un marco constituido por una línea central, que marca el valor sobre el que debería oscilar el estadístico, y dos límites de control, uno superior y otro inferior, que delimitan la región de “valores esperables” del estadístico bajo el supuesto de estabilidad del proceso bajo control. Las diferencias entre los diversos tipos de gráficos de control residen en los estadísticos utilizados y en la forma de determinar los límites de control, hechos que les confieren las propiedades características de cada uno de ellos.

En el resto del capítulo, abordaremos primero la estructura de los gráficos de control Shewhart y sus características más relevantes. Posteriormente, como solución parcial a una de sus limitaciones más destacadas, se abordarán los gráficos de medias móviles exponencialmente ponderadas (EWMA) y los de sumas acumuladas (CUSUM).

## 2.2. GRÁFICOS SHEWHART

Los gráficos de control Shewhart fueron diseñados para controlar la media y la variabilidad del proceso mediante dos gráficos de control. La idea general consiste en que, si el proceso está bajo control, las observaciones tomarán valores en torno a la media, siendo menos frecuentes cuanto más nos alejemos de ésta. Por ello, la obtención de valores muestrales “extremos” respecto a su media debería considerarse como una “señal de alarma” que indicaría alguna anomalía en el modelo probabilístico subyacente. En la situación más frecuente de valores desconocidos para los parámetros, la expresión general de estos gráficos de control es:

$$\begin{aligned}LSC &= E[T_x] + k \cdot D.T.[T_x] \\LC &= E[T_x] \\LIC &= E[T_x] - k \cdot D.T.[T_x]\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde  $T_x$  es un estimador de la característica controlada y  $k$  es la distancia entre los límites de control y la línea central, expresada en múltiplos de la desviación típica del estimador.

El valor tradicional de  $k$  es tres<sup>15</sup>, que bajo normalidad, implica una probabilidad de 0,0027 de estar fuera de los límites de control sin que se haya alterado el modelo probabilístico, es decir, considerar que el proceso está fuera de control sin ser cierto o, en términos más comunes, la probabilidad de una “falsa alarma”. Esta probabilidad tan pequeña va a suponer que la presencia de una observación fuera de los límites de control es una situación tan poco probable que es necesario investigar el proceso, declarándolo fuera de control. Con criterios

---

<sup>15</sup> Shewhart lo justificó indicando que, bajo el supuesto de normalidad y estabilidad del proceso, obtener observaciones situadas a más de tres desviaciones típicas de la media era suficientemente infrecuente como para considerar que se había alterado el estado del proceso.

similares a este (situaciones poco probables) fueron desarrolladas una serie de reglas por el equipo de control de calidad de la compañía Western Electric, denominadas reglas WECO, que en muchas ocasiones se utilizan para completar la interpretación del comportamiento representado en el gráfico de control.

El esquema muestral adoptado en estos gráficos consiste en la obtención de estimaciones de las medidas de posición y dispersión en cada submuestra y la utilización de éstas de forma independiente. Como medida de posición se utiliza la media muestral, y como medida de dispersión bien el rango o la cuasidesviación típica muestral<sup>16</sup>. Posteriormente, a partir de estos estadísticos para cada submuestra, la media del proceso se estima mediante la media de las medias muestrales de cada subgrupo ( $\bar{\bar{x}}$ ), estrategia equivalente a obtener la media de todas las observaciones, y la dispersión se estima como la media de las medidas de dispersión en cada subgrupo. Este segundo caso introduce sesgos en la medición de la variabilidad, que tienen que ser corregidos mediante diversas constantes que dependerán del tamaño muestral para obtener una estimación apropiada de la varianza del proceso.

Con este planteamiento se pueden obtener los gráficos de control Shewhart más conocidos: el gráfico media - desviación típica,  $(\bar{\bar{x}}, S)$ , y el gráfico media - rango,  $(\bar{\bar{x}}, R)$ . Como se puede observar, la diferencia estriba en la medida de dispersión utilizada, relacionada con la eficiencia en la estimación de los parámetros y no con distinta estructura muestral. Entrando más en detalle, las expresiones operativas de ambos gráficos serían:

---

<sup>16</sup> Desde una óptica probabilística, el rango es la peor medida, pero se continua utilizando dada su fácil interpretación como medida de dispersión. Con un planteamiento de estimación máximo verosímil, la medida idónea sería la desviación típica muestral, aunque se suele utilizar la cuasidesviación típica ya que es habitual estimar de forma insesgada la varianza del proceso.

- Gráfico media - desviación típica.

Primero vamos a establecer el gráfico de control para la dispersión del proceso, ya que los límites de control del gráfico de media dependen de la variabilidad y, por lo tanto, no tiene mucho sentido seguir con el análisis de la media del proceso si esta variabilidad no está bajo control. Suponemos que tenemos  $m$  submuestras preliminares de tamaño  $n$ , y como medida de dispersión se utiliza  $\bar{S}$ , media de las cuasidesviaciones típicas obtenidas en cada subgrupo. Entonces, la forma operativa del gráfico para la variabilidad es:

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{S} \cdot B_4 \\ LC &= \bar{S} \\ LIC &= \bar{S} \cdot B_3 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Para establecer los límites de control de este gráfico, se pondera la media de las cuasidesviaciones por dos valores,  $B_4$  y  $B_3$ , que dependen del número de observaciones en cada submuestra, de la distancia a la que están situados los límites de control (tres desviaciones típicas) y del factor usado para obtener una estimación insesgada de la desviación típica poblacional ( $C_4$ ), valores tabulados en numerosos manuales de control estadístico de la calidad, como Montgomery (2004)<sup>17</sup>. Existen ocasiones, cuando el tamaño muestral es pequeño, en las que el límite inferior de control calculado de esta forma toma valores negativos; en ese caso, el límite se sitúa en cero, ya que la medida de dispersión no toma valores negativos.

---

<sup>17</sup> Los valores tabulados son  $C_4$ ,  $B_3$  y  $B_4$  en función del tamaño de las submuestras, ya que siempre se considera el valor  $k=3$ .

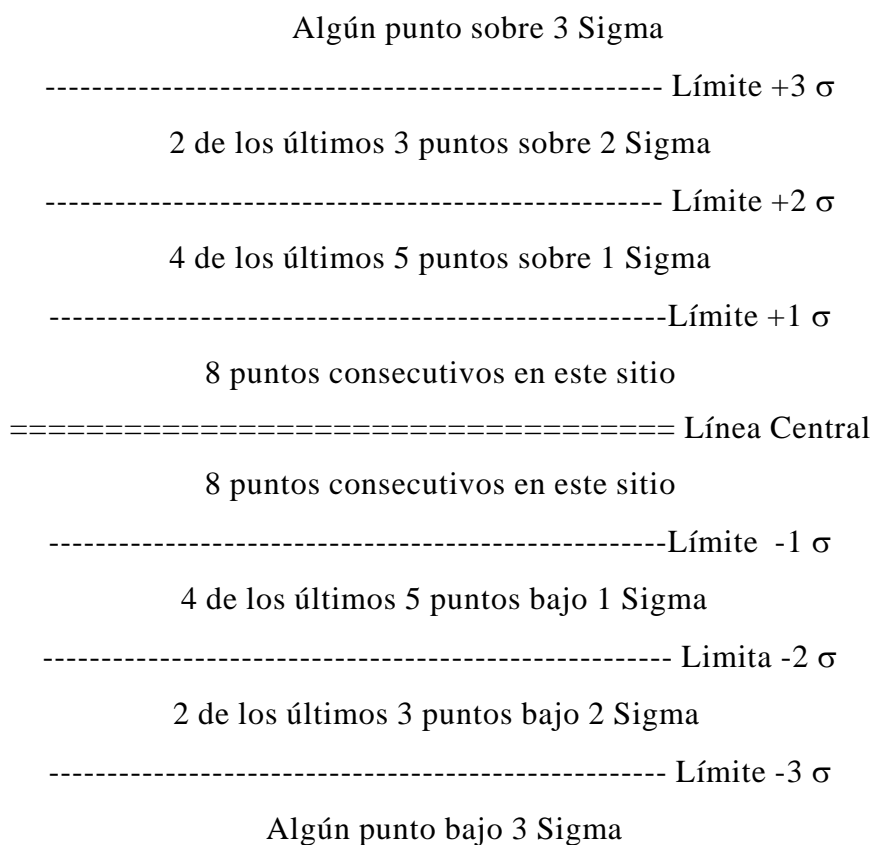
Para el gráfico de control de la media del proceso, se considera la media muestral como medida de posición, proporcionando la expresión operativa:

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{\bar{x}} + A_3 \cdot \bar{S} \\ LC &= \bar{\bar{x}} \\ LIC &= \bar{\bar{x}} - A_3 \cdot \bar{S} \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde el factor  $A_3$ , también tabulado frente al tamaño de las submuestras, recoge el efecto conjunto de la desviación típica de la media muestral y de factores de corrección del sesgo para situar los límites de control a tres desviaciones típicas.

Una vez representados gráficamente estos límites de control junto a los correspondientes valores medios o cuasidesviaciones típicas de cada una de las submuestras, se determina si el proceso se encuentra bajo control o no. Para ello, si hay alguna observación situada fuera de los límites de control, el proceso se considera fuera de control, por lo que habrá que intentar determinar las causas que han provocado esa situación. Si, por contra, todas las observaciones están situadas dentro de esos límites y no se observan patrones de comportamiento no aleatorio, se considera que el proceso se encuentra bajo control.

Para determinar la existencia de patrones no aleatorios en este gráfico se han desarrollado las ya comentadas reglas WECO (reglas de la Western Electric), ya que fue en esa organización donde se elaboraron, estas reglas las vamos a resumir mediante el siguiente esquema, aunque posteriormente pasaremos a comentarlas:



**Reglas de Tendencia:** 6 en rangos seguidos con tendencia ascendente o descendente.

14 en rango alterno con tendencia ascendente o descendente.

Las reglas de la WECO están basadas en situaciones poco probables. Sabemos que, para una distribución normal, la probabilidad de encontrar un punto fuera del límite de más (menos) tres desviaciones típicas es aproximadamente 0,3%. Esto es un caso raro, por lo tanto, si observamos un punto fuera de los límites de control, concluimos que el proceso ha cambiado y es inestable, por lo que consideramos que el proceso se encuentra fuera de control. De forma similar, identificamos otros sucesos que son igualmente raros para usarlos como síntomas de inestabilidad o comportamiento no aleatorio que nos pueden llevar a concluir que el proceso está fuera de control. La probabilidad de observar dos puntos de tres en un rango entre dos desviaciones típicas y tres desviaciones típicas, la probabilidad de observar cuatro puntos de cinco en un rango entre una desviación típica y dos desviaciones típicas y ocho puntos consecutivos situados entre la línea



central del gráfico y el límite de una desviación típica es también cercano al 0,3%. Además, existen unas reglas de tendencias en la distribución de las observaciones que nos van a servir para determinar la existencia de comportamientos no aleatorios, así como, una situación de control momentánea que puede cambiar con el paso del tiempo. Estas reglas de tendencia vienen recogidas al final del esquema anterior. Por lo tanto, la presencia de alguno de estos comportamientos considerados como raros o poco probables nos va a llevar a pensar que existe un cambio en el proceso, el proceso no tiene un comportamiento estable y lo vamos a considerar situado fuera de control.

- Gráfico media - rango.

En este caso, la medida de dispersión utilizada es el rango, adecuada cuando el tamaño de la muestra es relativamente pequeño, normalmente menor o igual a 10. Existe una relación en distribuciones normales entre el rango y la desviación establecida a través de una constante  $d_2$ , dependiente del tamaño de las muestras y tabulado en el anexo de muchos manuales de control estadístico de calidad, a través de la expresión:

$$\hat{\sigma}_x = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

donde  $\bar{R}$  es la media de los rangos de las distintas submuestras. Igualmente, la desviación típica del rango se puede estimar a partir de la desviación típica de la variable corregida por una constante  $d_3$ .

Con esta información tendremos que el gráfico de control de la dispersión tendrá la siguiente forma:

$$\begin{aligned} LSC &= D_4 \cdot \bar{R} \\ LC &= \bar{R} \\ LIC &= D_3 \cdot \bar{R} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Los factores de ponderación ( $D_4$  y  $D_3$ ) que acompañan al rango medio en los límites de control recogen el efecto de los factores de corrección de las estimaciones usadas ( $d_2$  y  $d_3$ ) para situar los límites a tres desviaciones típicas del rango medio, y dependen del tamaño muestral. Al igual que en el gráfico anterior, si el límite inferior tomase un valor negativo, se sustituiría por cero.

El gráfico de control para la media del proceso adoptaría la expresión:

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{\bar{x}} + A_2 \cdot \bar{R} \\ LC &= \bar{\bar{x}} \\ LIC &= \bar{\bar{x}} - A_2 \cdot \bar{R} \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde  $A_2$  es la contrapartida de la constante  $A_3$  en el caso de utilizar el rango como medida de dispersión.

En los gráficos de control se pueden producir dos tipos de errores, decidir que el proceso está fuera de control cuando realmente no ha cambiado y no detectar un cambio en los supuestos básicos del modelo probabilístico subyacente. El primer caso, conocido como “falsa alarma” debe ser infrecuente, ya que los gráficos Shewhart están diseñados para que esto ocurra con una probabilidad inferior a 0,003. Para controlar este efecto se utiliza una medida conocida con las siglas inglesas ARL (average run length), es decir, recorrido medio de racha. Este ARL nos permite determinar el número de muestras que debemos examinar o trazar en el gráfico de control antes de encontrar un punto fuera de los límites de control. Cuando el proceso se encuentra bajo control, se denota como  $ARL_0$  y se adopta la expresión:

$$ARL_0 = \frac{1}{\text{probabilidad un punto fuera de los límites de control}} = \frac{1}{\alpha} \tag{2.6}$$

Este  $ARL_0$  va a medir el número de muestras a examinar hasta encontrar una falsa alarma, interesando por tanto un valor alto. En el caso de gráficos Shewhart con los límites de control situados a tres desviaciones típicas, éste sería:

$$ARL_0 = \frac{1}{0,0027} \approx 371, \text{ valor lo suficientemente alto en la práctica.}$$

Por otro lado, cuando se produce un cambio en el modelo, debería detectarse rápidamente, es decir, el número de muestras necesarias hasta que sea detectado ha de ser pequeño. En este caso, el ARL es el inverso de la potencia del contraste y se denota por  $ARL_*$ , donde \* representa el cambio que se produce en la media del proceso medido en múltiplos de la desviación típica, es decir:

$$ARL_{\delta} = \frac{1}{1 - \beta} \quad (2.7)$$

Una crítica habitual a esta medida es que su distribución probabilística sigue un modelo geométrico. Este tipo de distribución presenta una gran variabilidad,

$$\sigma = \sqrt{\frac{(1 - \beta)}{\beta}}, \text{ y una gran asimetría, por lo que su estimación a partir de una}$$

única secuencia de observaciones presenta una gran inestabilidad y su valor medio no es muy representativo.

Una alternativa a esta medida viene cuantificada a través de la potencia del contraste. El estudio de la potencia ante cambios en el proceso es, pues, un mecanismo útil para comprobar la bondad de un gráfico. A esta idea corresponde la noción de curva característica operativa (OC). Esta curva OC se obtendría representando gráficamente en el eje de abscisas la magnitud del cambio en la media del proceso, medido bien en unidades bien en términos de la desviación típica de la variable, y en el eje de ordenadas la probabilidad de que el estimador utilizado tome un valor entre los límites especificados, es decir, que consideremos

el gráfico bajo control. La figura 2.1 recoge un ejemplo de una curva característica operativa.

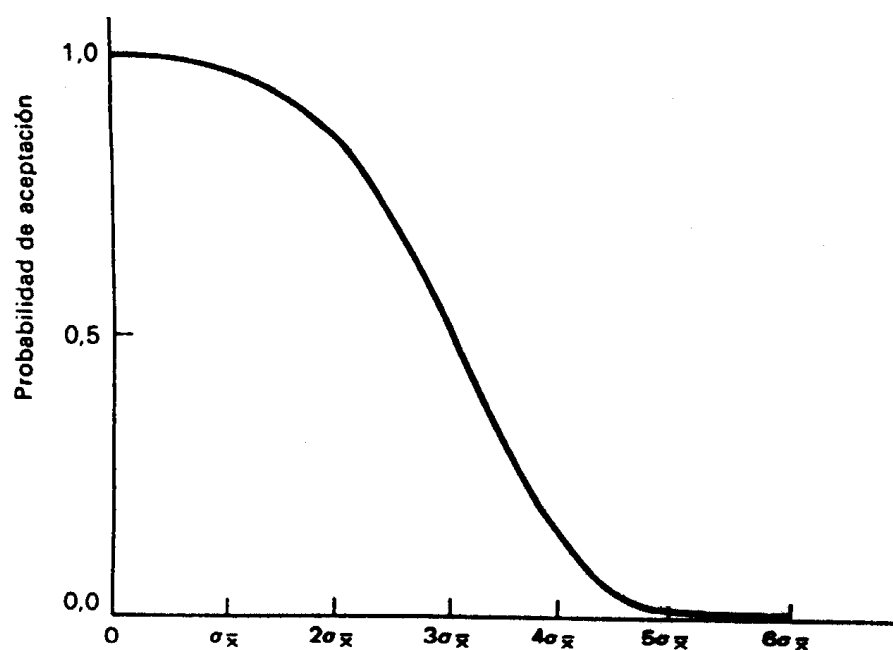


Figura 2.1: Curva característica operativa.

El uso de los gráficos de control Shewhart está muy implantado en la industria, debido sobre todo a su sencillez, tanto en su elaboración como en la interpretación de los resultados obtenidos. Sin embargo, debido a su diseño, estos gráficos son válidos para detectar grandes cambios en el proceso, no siendo tan eficientes ante cambios de pequeña magnitud<sup>18</sup>. Esta característica se debe parcialmente al hecho de que estos gráficos solamente representan la información contenida en cada submuestra, “olvidándose” de la información dada por la secuencia entera de observaciones para preservar la independencia. Este problema se mitiga mediante el uso de las reglas WECO que, por contra, conllevan una reducción del  $ARL_0$ . Concretamente, como muestran Champ y Woodall (1987) este

---

<sup>18</sup> Normalmente como cambio pequeño vamos a entender cambios inferiores a dos desviaciones típicas

valor estaría situado en 91,75, lo que supone una reducción considerable respecto al del gráfico Shewhart sin usar las reglas WECO.

Para solucionar este problema se desarrollaron otra serie de gráficos de control, entre los que cabe destacar por su mayor desarrollo los de medias móviles exponencialmente ponderadas, EWMA, y de sumas acumuladas, CUSUM. En ambos, se recurre a una modificación de la estructura muestral, pasando a utilizar estadísticos muestrales que incorporan toda la información disponible en cada momento y modificando los límites de control para asegurar un buen comportamiento de la longitud media de racha.

### 2.3. GRÁFICOS DE CONTROL DE MEDIAS MÓVILES EXPONENCIALMENTE PONDERADAS (EWMA)

Una alternativa a los gráficos de control Shewhart, con mayor sensibilidad en la detección de cambios de pequeña magnitud en el proceso de producción, son los gráficos de medias móviles exponencialmente ponderadas (EWMA, exponentially weighted moving average). Este gráfico de control, que va a tener buenas propiedades incluso cuando estamos manejando observaciones individuales, fue introducido por Roberts (1959) y, en el caso de controlar la media del proceso, se basa en la utilización del estadístico:

$$z_i = \lambda \cdot \bar{x}_i + (1 - \lambda) \cdot z_{i-1} \quad (2.8)$$

donde:

- $\lambda$  es una constante comprendida entre cero y uno que determina el peso o importancia que se le asigna a las observaciones pasadas del proceso.
- $\bar{x}_i$  es la media de las observaciones recogidas dentro de la muestra i-ésima.
- $z_{i-1}$  es el valor del estadístico EWMA correspondiente al período anterior al momento en el que estamos situados.

Como valor inicial  $z_0$  se suele usar el valor objetivo, usualmente fijado en la media de las observaciones. Si analizamos el valor de este estadístico se puede observar que las ponderaciones de cada media, determinadas por el parámetro  $\lambda$  decrecen de forma geométrica, de ahí que algunos manuales nombren a este gráfico como gráfico de medias móviles geométricas (geometric moving average, GMA). Además, como es una media ponderada de observaciones pasadas y actuales, va a ser menos sensible a la suposición de normalidad, salvo en el caso de distribuciones extremadamente no normales.

Si las observaciones son variables aleatorias independientes con varianza  $\mathbf{F}^2$ , Roberts (1959) obtuvo que la varianza del estadístico  $z_i$  responde a la expresión:

$$\sigma_{z_i}^2 = \sigma_{\bar{x}}^2 \left( \frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) [1 - (1 - \lambda)^{2i}] = \frac{\sigma^2}{n} \left( \frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) [1 - (1 - \lambda)^{2i}] \quad (2.9)$$

Por lo tanto, el gráfico de control EWMA va a estar formado por la representación de los valores  $z_i$  para cada muestra junto a los límites de control determinados de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} LSC_i &= \mu_0 + L \cdot \sigma_{\bar{x}} \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2i}]} \\ LC &= \mu_0 \\ LIC_i &= \mu_0 - L \cdot \sigma_{\bar{x}} \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2i}]} \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde  $L$  es la anchura de los límites de control.

Como se puede observar, estos límites de control no van a ser constantes, sino que van a aumentar en anchura a medida que aumenta el número de submuestras, tendiendo a estabilizarse, ya que con grandes valores del término  $i$ , el término  $[1 - (1 - \lambda)^{2i}]$  converge a la unidad. De ahí que, en algunos casos, los límites de control vengan definidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} LSC &= \mu_0 + L \cdot \sigma_{\bar{x}} \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \\ LC &= \mu_0 \\ LIC &= \mu_0 - L \cdot \sigma_{\bar{x}} \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

El análisis del ARL del gráfico de control EWMA ha sido abordado desde distintos puntos de vista. Robinson y Ho (1978) llevan a cabo el desarrollo de un procedimiento numérico para determinar el ARL dando distintas combinaciones de parámetros  $L$  y  $\delta$  para distintos cambios en la media del proceso. Crowder (1987, 1989) usa ecuaciones integrales para determinar el ARL y desarrolla un programa informático para calcularlo bajo el supuesto de normalidad. Lucas y Saccuci (1990) desarrollan, quizás, el trabajo más amplio en el estudio del ARL del gráfico EWMA, resultado plasmado en la elaboración de tablas que recogen su comportamiento para distintas combinaciones de los parámetros  $\delta$  y  $L$ .

Para la selección óptima de los parámetros del modelo ( $L$  y  $\delta$ ), normalmente se especifica un valor del  $ARL_0$  y el ARL para determinada magnitud del cambio que queramos detectar. En general, se suelen usar valores de  $\delta$  comprendidos entre 0,05 y 0,20, ya que en el trabajo de Lucas y Saccuci (1990) se muestra que suelen tener un buen comportamiento en la mayoría de situaciones, usando valores más pequeños de  $\delta$  cuanto menor sea el cambio que deseemos detectar. En la siguiente tabla<sup>19</sup>, recogemos el ARL calculado para distintos valores de  $\delta$  distintos cambios en el proceso, medidos como múltiplos de la desviación típica y considerando una anchura de límites,  $L$ , tal que el  $ARL_0$  tome un valor fijo de 500.

<b>Tabla 2.1: Recorrido Medio de Racha gráfico EWMA (ARL)</b>					
<b>Cambio en la media</b>	<b><math>L = 3,054</math> <math>\delta = 0,4</math></b>	<b><math>L = 2,998</math> <math>\delta = 0,25</math></b>	<b><math>L = 2,962</math> <math>\delta = 0,2</math></b>	<b><math>L = 2,814</math> <math>\delta = 0,1</math></b>	<b><math>L = 2,615</math> <math>\delta = 0,05</math></b>
<b>0</b>	500	500	500	500	500
<b>1</b>	14,26	11,14	10,54	10,33	11,38
<b>1,5</b>	5,87	5,46	5,50	6,08	7,11
<b>2</b>	3,52	3,61	3,74	4,36	5,22

<sup>19</sup> Los valores recogidos en la tabla han sido elaborados usando el paquete SPC de R 2.0.0. Una tabla con los valores del ARL, para distintas combinaciones en los parámetros del gráfico EWMA ante distintos cambios en la media del proceso, puede encontrarse en Lucas y Saccucci (1990).



Tabla 2.1: Recorrido Medio de Racha gráfico EWMA (ARL)					
Cambio en la media	L = 3,054 <b>δ</b> = 0,4	L = 2,998 <b>δ</b> = 0,25	L = 2,962 <b>δ</b> = 0,2	L = 2,814 <b>δ</b> = 0,1	L = 2,615 <b>δ</b> = 0,05
3	2,02	2,26	2,38	2,87	3,50
4	1,44	1,73	1,86	2,19	2,69

Fuente: Información obtenida usando el paquete SPC de R 2.0.0.

Hunter (1989) estudió el gráfico de control EWMA y propuso asignar un valor **δ** que diera el mismo peso a las observaciones previas y a las observaciones actuales, dando un resultado muy parecido al de un gráfico Shewhart con el uso de las reglas WECO.

Estos gráficos EWMA son más eficaces en la detección de pequeños cambios, pero no son tan rápidos como el Shewhart en la detección de grandes cambios. Por ello, no es raro encontrar en la práctica una combinación de ambos tipos de gráficos e incluso la representación conjunta de ambos estadísticos en un sólo gráfico.

Aunque, lo más habitual es encontrar estos gráficos desarrollados para el control de la media del proceso, se ha estudiado también el desarrollo de métodos EWMA para el control de la variabilidad. Concretamente, MacGregor y Harris (1993) proponen el uso del estadístico EWMA para controlar la desviación típica del proceso, definiendo lo que denominan error cuadrático medio exponencialmente ponderado (EWMSE, exponentially weighted mean square error) como:

$$S_i^2 = \lambda (\bar{x}_i - \mu)^2 + (1 - \lambda) S_{i-1}^2 \quad (2.12)$$

Se puede demostrar que  $E(S_i^2) = \sigma^2$  para muestras de tamaño grande y además, si las observaciones son independientes, esta estimación tiene, aproximadamente, una distribución chi-cuadrado con  $v = (2 - \delta) / \delta$  grados de

libertad. Por lo tanto, si  $\mathbf{F}_0$  representa el valor bajo control u objetivo de la desviación estándar del proceso, la raíz cuadrada del error cuadrático medio exponencialmente ponderado  $\left(\sqrt{S_i^2}\right)$  puede trazarse gráficamente junto a los límites de control correspondientes dados por:

$$LSC = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{v, \alpha/2}^2}{v}} \quad LIC = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{v, 1 - (\alpha/2)}^2}{v}} \quad (2.13)$$

MacGregor y Harris (1993) señalan que el estadístico EWMSE puede ser sensible tanto a cambios en la media como en la desviación típica del proceso. Para solucionar este problema proponen sustituir  $\hat{\mu}_i$  en cada punto del tiempo por la estimación de este valor mediante el estadístico EWMA ( $z_i$ ), de tal forma que el valor a representar gráficamente, junto a los límites de control correspondientes se determina como:

$$S_i^2 = \lambda (\bar{x}_i - z_i)^2 + (1 - \lambda) S_{i-1}^2 \quad (2.14)$$



## 2.4. GRÁFICOS DE CONTROL DE SUMAS ACUMULADAS (CUSUM)

Los gráficos de control de sumas acumuladas (CUSUM) son una buena alternativa, igual que el gráfico de medias móviles exponencialmente ponderadas (EWMA), al gráfico de control Shewhart para detectar pequeños cambios en el proceso. Estos gráficos fueron propuestos por Page (1954), aunque desde entonces han sido muchos los autores que los han estudiado, como Page (1961), Lucas (1976), Hawkins (1981), Gan (1991) o Woodall y Adams (1993).

En estos gráficos CUSUM se usan como estadístico las sumas acumuladas de las medias de las distintas submuestras. En este trabajo vamos a analizar los gráficos de control CUSUM bajo el supuesto usual de normalidad, aunque también es posible usarlo para variables con distribuciones Poisson o Binomiales con el fin de modelizar disconformidades existentes en el proceso.

El estadístico de sumas acumuladas ( $C_i$ ) adopta la forma :

$$C_i = \sum_{j=1}^i (\bar{x}_j - \mu_0) = \bar{x}_i - \mu_0 + \sum_{j=1}^{i-1} (\bar{x}_j - \mu_0) = (\bar{x}_i - \mu_0) + C_{i-1} \quad (2.15)$$

donde  $\bar{x}_i$  es la media de la muestra  $i$ -ésima y  $\mu_0$  es el valor objetivo, usualmente fijado en la media global del proceso.

Se puede observar que, si el proceso permanece bajo control para el valor objetivo  $\mu_0$ , el estadístico dado en (2.15) debería variar aleatoriamente alrededor de cero. Sin embargo, si la media cambia a un valor  $\mu_1 > \mu_0$ , entonces se observará un desplazamiento del estadístico en dirección positiva, es decir, una tendencia creciente. Recíprocamente, si la media cambia a un valor  $\mu_2 < \mu_0$ , entonces se observará un desplazamiento en dirección negativa, es decir, una tendencia decreciente de dichas sumas acumuladas. Por lo tanto, en caso de observar una

clara tendencia en el estadístico, podemos sospechar que el proceso está situado fuera de control.

Para determinar los límites de control en este gráfico existen dos planteamientos distintos, dando lugar a lo que se conoce como CUSUM tabular y máscara en V. La primera, denominada también CUSUM algorítmico, está basado en la representación gráfica de los estadísticos:

$$\begin{aligned} C_i^+ &= \max [0, \bar{x}_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+] \\ C_i^- &= \max [0, (\mu_0 - K) - \bar{x}_i + C_{i-1}^-] \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde  $\mu_0$  es el valor objetivo o valor medio de la característica de calidad cuando el proceso se encuentra bajo control,  $\bar{x}_i$  es el valor medio de la  $i$ -ésima muestra y  $K$  es un valor de referencia. El valor de  $K$  y de los límites de control se hace proporcional a la desviación típica de la media del proceso:

$$\begin{aligned} K &= k \cdot \sigma_{\bar{x}} \\ LSC &= h \cdot \sigma_{\bar{x}} \\ LIC &= -h \cdot \sigma_{\bar{x}} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Los parámetros  $k$  y  $h$  son seleccionados de forma que haya un buen comportamiento del ARL del gráfico. Numerosos estudios, como los desarrollados por: Brook y Evans (1972), Vance (1986), Hawkins (1993) y Woodall y Adams (1993), han permitido llegar a la conclusión de que valores de  $h$  iguales a 4 ó 5 y un valor de  $k$  igual a la mitad del cambio que queremos detectar, medido en múltiplos de la desviación típica ( $\frac{1}{2} \sigma$ ), conducen a un gráfico CUSUM con buenas propiedades en el ARL ante pequeños cambios en la media del proceso.

La otra alternativa se conoce como CUSUM de máscara en V, procedimiento propuesto por Barnard (1959). Para la representación gráfica de esta máscara en V se utiliza como estadístico las sumas acumuladas de los valores de la media tipificados:

$$C_i = \bar{y}_i + C_{i-1} \quad (2.18)$$

donde  $\bar{y}_i = \frac{\bar{x}_i - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}$ .

En términos generales, la máscara en V tiene la siguiente forma:

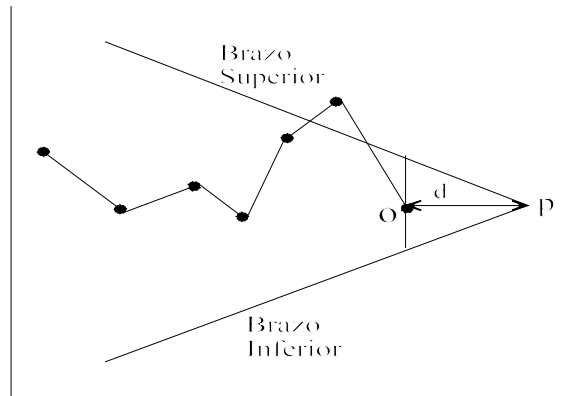


Gráfico 2.2: Gráfico CUSUM máscara en V.

Habría que situar la máscara en el gráfico de sumas acumuladas con el punto O situado en el último valor de las sumas acumuladas y la línea OP paralela al eje de abscisas. Si todas las sumas acumuladas previas al punto donde está situado el origen caen dentro de los dos brazos de la máscara, el proceso se considera bajo control, mientras que si alguna suma acumulada cae fuera de esos brazos, se dice que el proceso se encuentra fuera de control. Esta máscara debe aplicarse a cada nuevo punto que tracemos en el gráfico CUSUM y los brazos de la nueva máscara se consideran una extensión de los gráficos determinados anteriormente.

El comportamiento de este gráfico viene determinado por el valor de la distancia  $d$  y del ángulo  $\theta$ . Johnson (1961) propone una forma general para determinar ambos parámetros mediante las siguientes ecuaciones:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\delta}{2A}\right) \quad ; \quad d = \left(\frac{2}{\delta^2}\right) \ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right) \quad (2.19)$$

donde:

- $2''$  es la probabilidad permitida de una falsa alarma.
- $\$$  es la probabilidad deseada de no detectar un cambio de tamaño  $*$ .
- $*$  es el tamaño del cambio que queremos detectar con probabilidad  $1-\$$ .
- $A$  es un factor que relaciona la unidad de escala vertical con la de escala horizontal, es decir, mide la distancia horizontal de la máscara  $V$  entre dos puntos sucesivos en términos de unidad de distancia al eje vertical. Normalmente toma valores de una o dos veces la desviación típica de la media del proceso.

Cuando el valor de  $\$$  es pequeño, que es lo más normal en la práctica, el valor de la distancia  $d$  se puede aproximar por  $d \approx -2 \frac{\ln \alpha}{\delta^2}$ .

Para que este gráfico tenga propiedades similares a los obtenidos mediante el CUSUM tabular, los parámetros de ambos gráficos deben guardar la relación:

$$k = A \cdot \tan \theta \quad ; \quad h = A \cdot d \cdot \tan(\theta) = d \cdot k \quad (2.20)$$

Sin embargo, el uso del CUSUM tabular se considera más adecuado, ya que con esta máscara en  $V$  obtenemos peores valores para el ARL bajo control y, además, va a ser menos sensible a cambios mayores de una desviación típica en la media del proceso. Para solucionar este problema, Lucas (1973) propuso una modificación que permitía obtener una máscara en  $V$  con forma parabólica, presentando un mejor comportamiento para cambios superiores a 1,5 desviaciones típicas en la media, si bien, el comportamiento ante cambios menores es algo peor

que el del gráfico original. Además, como indica Montgomery (2004), existen otras dificultades en la determinación de este gráfico:

1. La máscara en V es un esquema bilateral, impidiendo su aplicación cuando se conoce la dirección del cambio en la media.
2. Las características de poder anticipar un cambio en el proceso, muy útil en las técnicas estadísticas de control de la calidad, no puede utilizarse con la máscara en V.
3. En ocasiones, va a ser difícil determinar hasta dónde deben extenderse los brazos de la máscara V, por lo que, la interpretación se hace más difícil en la práctica.
4. El problema principal puede ser la ambigüedad existente a la hora de determinar " y \$.

Por estas consideraciones, en la práctica es más utilizado el esquema tabular del gráfico CUSUM. En este caso, el ARL puede calcularse, según recomiendan Woodall y Adams (1993) basándose en la aproximación de Siegmund (1985), como:

$$\frac{1}{ARL} = \frac{1}{ARL^+} + \frac{1}{ARL^-} \quad (2.21)$$

donde  $ARL^+$  y  $ARL^-$  se pueden calcular de la siguiente forma:

$$ARL = \frac{\exp(-2\Delta b) + 2\Delta b - 1}{2\Delta^2} \quad (2.22)$$

donde  $\Delta = k - k_0$  para  $C_i^+$ , y  $\Delta = -k - k_0$  para  $C_i^-$  y  $b = h + 1,166$ . Si desarrollamos los cálculos para determinar el ARL para distintos cambios en la media del proceso, todos ellos medidos en términos de desviaciones típicas de la



variable, obtendríamos la siguiente tabla<sup>20</sup> para distintos valores del parámetro  $h$  y considerando que el parámetro  $k$  toma un valor de 0,5:

<b>Tabla 2.2: Recorrido Medio de Racha gráfico CUSUM (ARL)</b>		
<b>Cambio en la media</b>	<b><math>h = 4</math></b>	<b><math>h = 5</math></b>
<b>0</b>	167,68	465,44
<b>1</b>	8,38	10,38
<b>1,5</b>	4,75	5,75
<b>2</b>	3,34	4,01
<b>3</b>	2,19	2,57
<b>4</b>	1,71	2,01

Fuente: Información obtenida usando el paquete SPC de R 2.0.0.

Como se puede observar, para detectar un cambio de una desviación típica es necesario examinar 8,38 muestras o 10,38 dependiendo del valor utilizado para el parámetro  $h$ ; si comparamos este resultado con un gráfico Shewhart, vemos que hemos obtenido una mejora sustancial, ya que con un gráfico Shewhart sería necesario analizar alrededor de 44 muestras.

En el caso de estar en una situación bajo control, el número de muestras examinadas hasta encontrar una situación fuera de control es de 168 y 465 respectivamente para un valor de parámetro  $h$  igual a 4 ó 5, se puede calcular que para obtener un  $ARL_0$  igual al obtenido en el caso Shewhart con límites de control situados a tres desviaciones típicas es necesario usar un valor del parámetro  $h$  igual a 4,77.

<sup>20</sup> Los valores del ARL del gráfico de control CUSUM han sido obtenidos mediante el paquete SPC de R 2.0.0, aunque también pueden encontrarse tabulados en los trabajos de Goel y Wu (1971) y Lucas (1976).

Se puede observar que este CUSUM tabular presenta un buen comportamiento para la detección de pequeños cambios en el proceso, pero presenta problemas para la detección de grandes cambios. Para solucionar este problema se han propuesto distintas alternativas, pero la más utilizada consiste en el uso de forma simultánea de una combinación de CUSUM y gráficos Shewhart, igual que veíamos en el gráfico EWMA. En este caso, es recomendable situar los límites de control del gráfico Shewhart a 3,5 desviaciones típicas de la línea central o valor objetivo  $\mu_0$ , ya que con los límites de control a esa distancia llegaremos a un mejor comportamiento del ARL del proceso.

Si usamos esta combinación de métodos de control vamos a ver que conseguimos una mejora del ARL para grandes cambios. Por ejemplo, cuando intentamos detectar cambios en el proceso de tres desviaciones típicas el ARL de un CUSUM se sitúa en 2,57 con  $h=5$ , mientras que con la combinación de estos dos métodos obtenemos un ARL de 2,10, lo que supone cierta mejora en el comportamiento, ya que seremos capaces de detectar los cambios producidos de una forma más rápida. Esta combinación también va a suponer un descenso en el ARL bajo control, pero este descenso va a ser muy leve. Por lo tanto, esta combinación es una forma efectiva de mejorar la respuesta del CUSUM ante grandes cambios.

Además de los gráficos CUSUM para el control de la media del proceso se han estudiado, igual que ocurría en el gráfico EWMA, métodos CUSUM para el control de la variabilidad. Suponiendo que la distribución de la variable bajo control es normal con media  $\mu_0$  y desviación típica  $\sigma_x$ , Hawkins (1981, 1993) sugiere desarrollar un gráfico de control para el estadístico  $v_i$ :

$$v_i = \frac{\sqrt{|y_i|} - 0,822}{0,349}$$

donde  $y_i$  es el valor estandarizado de la media  $\bar{x}_i$ .

Este valor es más sensible a cambios en la varianza que a cambios en la media, por lo que, será usado en un gráfico de control para la variabilidad del proceso mediante el cálculo de los siguientes estadísticos:

$$S_i^+ = \max [0, v_i - k + S_{i-1}^+]$$

$$S_i^- = \max [0, -k - v_i + S_{i-1}^-]$$

asumiendo que  $S_0^+ = S_0^- = 0$ .

La interpretación de los resultados es similar al caso de gráficos para el control de la media: si la desviación típica del proceso aumenta, el valor de  $S_i^+$  aumentará y excederá el valor  $h$  en el que están situados los límites de control y si la desviación típica decrece, el valor de  $S_i^-$  aumentará y excederá el valor  $h$ . A veces, incluso se llega a representar en el mismo gráfico ambos CUSUM, el que sirve para controlar la media del proceso y el que se usa para controlar la variabilidad.

## **CAPÍTULO 3**

### **GRÁFICOS DE CONTROL MULTIVARIANTES**

#### **3.1. INTRODUCCIÓN**

Las técnicas univariantes están diseñadas para controlar la calidad mediante el análisis de una característica de calidad. Sin embargo, en los procesos de producción actuales, suelen existir varias características que influyen de forma conjunta e interrelacionada en la calidad final de los productos. Para solventar este problema y poder controlar varias características al mismo tiempo surgen las técnicas de control de calidad multivariantes.

Una posible solución sería desarrollar métodos de control univariantes para cada característica, pero existe una solución mejor que consiste en controlar todas de forma simultánea mediante técnicas de control multivariantes. De esta forma, no sólo vamos a analizar el efecto de cada una de las características sobre la calidad, sino que vamos a considerar también el efecto de las interacciones entre ellas.

Cuando estamos analizando varias características de calidad, que vamos a considerar independientes y normalmente distribuidas, la probabilidad de cometer un error tipo I si analizamos  $p$  características de calidad al mismo tiempo será de  $\alpha' = 1 - (1 - \alpha)^p$  y la probabilidad de que todas las medias caigan de forma simultánea dentro de los límites de control es de  $(1 - \alpha)^p$ . Por lo tanto, la probabilidad de que el proceso esté completamente bajo control será menor que en el caso de gráficos univariantes. Esta situación se repite con la probabilidad de que el proceso se encuentre fuera de control.

Si analizamos dos variables<sup>21</sup> mediante gráficos univariantes, independientes, la región de control va a tener la siguiente forma:

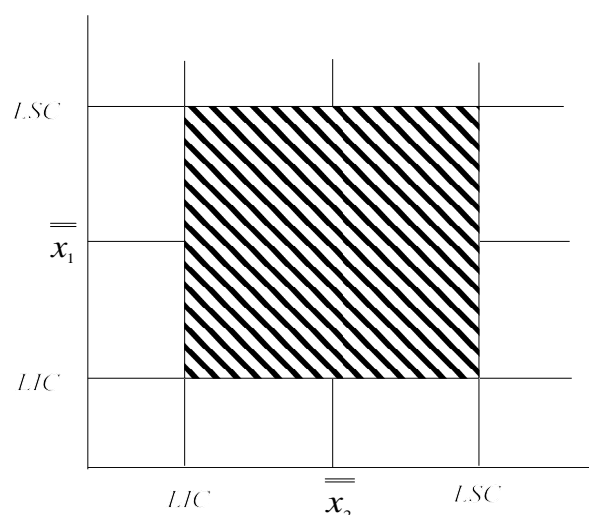


Figura 3.1: Región de Confianza para gráficos independientes.

Sin embargo en el caso bidimensional, la región de aceptación tiene forma de elipse de control, cuya inclinación depende de la correlación existente entre las variables que estemos analizando. Estas elipses de control nos van a permitir determinar: puntos fuera de control que no se podrían detectar si usáramos gráficos univariantes, y puntos situados bajo control que antes eran considerados como

<sup>21</sup> Como las características de calidad que vamos a analizar van a ser de tipo cuantitativo, de aquí en adelante vamos a utilizar indistintamente el concepto de característica de calidad y variable.

situaciones fuera de control. Esta región de control cuando la correlación existente entre las variables es nula va a tener la siguiente forma:

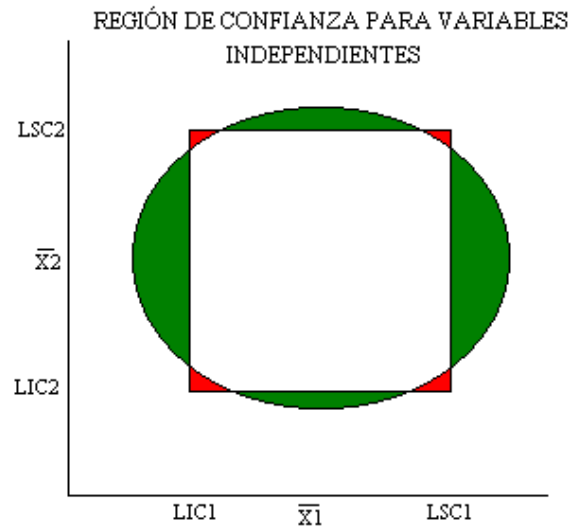


Figura 3.2: Región de confianza para variables independientes.

Si comparamos esta región de control con la resultante de utilizar dos gráficos de control univariantes (figura 3.1) podemos observar que existen dos áreas coloreadas: cualquier observación que cayese en una zona verde sería catalogada como fuera de control por los gráficos univariantes, pero estaría en la verdadera región de control, por lo que sería una falsa alarma. Si una observación cayese en una zona roja sería catalogada como bajo control cuando realmente no lo está, por lo que los gráficos univariantes serían incapaces de detectar esas alteraciones.

Cuando las variables no son independientes la relación entre las variables va a quedar de manifiesto en la mayor o menor inclinación de la elipse, de manera que, cuanto mayor sea la correlación existente entre las variables mayor será la inclinación. Para dos variables que presenten una relación positiva la forma de la región de control (elipse de control) será la siguiente:

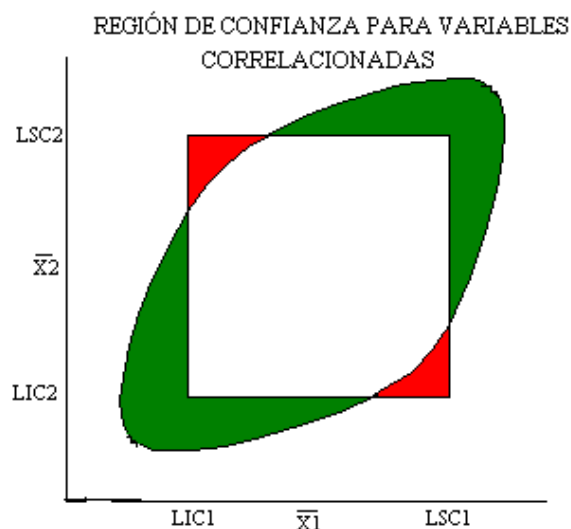


Figura 3.3: Región de confianza para variables correlacionadas.

Como se aprecia, las áreas de interpretación contraria aumentan, invalidando los resultados de los gráficos univariantes. Por todo ello, es necesaria la construcción de gráficos multivariantes que permitan controlar simultáneamente varias características de calidad.

La interpretación de las observaciones representadas en una elipse de control es similar a la que se hacía en el caso de los gráficos de control de tal forma que, cuando todas las observaciones se encuentran situadas dentro de la elipse de control se va a considerar que el proceso se encuentra bajo control, en caso contrario vamos a considerar que el proceso se encuentra fuera de control. A diferencia de lo que ocurría en los gráficos de control univariantes, en este caso resulta más difícil entrar a valorar patrones de comportamiento no aleatorio, así como encontrar el origen de situaciones fuera de control.

Existen dos inconvenientes fundamentales que aparecen al utilizar estas elipses de control: el primero es que vamos a perder la secuencia en el tiempo de las observaciones trazadas y, por lo tanto, va a ser más difícil analizar la tendencia o aplicar otras técnicas de análisis de la información. El segundo es que en el caso de que se analicen más de dos variables al mismo tiempo, la representación de la

misma se va a complicar. De ahí que en la mayoría de los métodos de control multivariantes se recurra a la determinación de cierto estadístico que resuma la información junto con unos límites de control, siguiendo una metodología similar a la utilizada con los gráficos de control univariantes.

Dentro de estas técnicas multivariantes cabe destacar tres: métodos basados en distancias (básicamente,  $T^2$  de Hotelling), métodos MEWMA y métodos MCUSUM. En este capítulo, vamos a abordar primero el gráfico de control  $T^2$  de Hotelling, extensión multivariante del gráfico Shewhart y sin duda uno de los gráficos multivariantes más utilizados. A continuación, se abordarán los gráficos de control MEWMA y MCUSUM, diseñados para solucionar algunas de las deficiencias del gráfico  $T^2$ , extensión multivariante de los gráficos EWMA y CUSUM. Por último, vamos a recoger: el efecto que tiene sobre el comportamiento de los gráficos de control clásicos (univariantes y multivariantes) el incumplimiento de las hipótesis de partida y las principales soluciones dadas en la literatura especializada. Esta última parte es la base en la que se sustenta el desarrollo de este trabajo, dado que el objetivo del mismo es dar soluciones a estas deficiencias siguiendo un enfoque multivariante.





### 3.2. GRÁFICOS DE CONTROL BASADOS EN DISTANCIAS

El gráfico de control  $T^2$  de Hotelling se puede considerar como la extensión multivariante del gráfico Shewhart, lo que no quiere decir que sean gráficos iguales. Como hemos comentado anteriormente, en la mayoría de los métodos de control multivariantes se recurre a la determinación de cierto estadístico que resuma la información, en este caso el estadístico  $T^2$  de Hotelling. Este estadístico es un escalar que combina información para medidas de dispersión y posición de las variables que estamos analizando.

En el caso de que se conozcan los verdaderos parámetros de la distribución de probabilidad (media y desviación típica) podemos usar el estadístico chi-cuadrado ( $P^2$ ). Además, en muchas aplicaciones vamos a asumir que las variables que estamos analizando siguen una distribución normal multivariante<sup>22</sup>. El estadístico chi-cuadrado para una distribución normal bivalente va a tener la siguiente forma :

$$\chi_0^2 = \frac{n}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} [\sigma_2^2 (\bar{x}_1 - \mu_1)^2 + \sigma_1^2 (\bar{x}_2 - \mu_2)^2 - 2 \sigma_{12} (\bar{x}_1 - \mu_1) (\bar{x}_2 - \mu_2)]$$

donde  $\bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$  son las medias muestrales de las observaciones,  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son las medias poblacionales<sup>23</sup>,  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son las desviaciones típicas y  $\sigma_{12}$  es la covarianza. La representación gráfica de estas observaciones bivariantes va a tener forma de elipse, con los ejes principales determinados por el valor de la covarianza.

---

<sup>22</sup> Las variables siguen una distribución normal multivariante, expresado como  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  si la función de densidad conjunta adopta la forma:

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p) = (2\pi)^{-p/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \right]$$

<sup>23</sup> Cuando hablamos de valores poblacionales hacemos referencia a los parámetros del proceso.

Si estamos analizando más de dos variables el estadístico chi-cuadrado toma la siguiente forma :

$$\chi_0^2 = n (\bar{x}_i - \mu)^t \Sigma^{-1} (\bar{x}_i - \mu) \quad (3.1)$$

donde : es un vector  $p \times 1$  de medias,  $\mathbf{G}$  es la matriz de varianzas y covarianzas de orden  $p \times p$ <sup>24</sup> y  $n$  es el tamaño muestral. El límite superior de control se va a situar para un nivel de significación dado en  $\chi_{(\alpha, p)}^2$ , y el límite inferior está situado en cero dado que este estadístico no va a tomar valores negativos.

Cuando el verdadero valor poblacional no es conocido, se usa el gráfico de control  $T^2$  de Hotelling. La distancia  $T^2$  es una medida que tiene en cuenta la estructura de covarianzas de la distribución normal multivariante. Fue propuesta por Harold Hotelling en 1947 y se puede considerar como la equivalencia multivariante del estadístico t-student.

La distancia  $T^2$  se calcularía como :

$$T_i^2 = n (\bar{x}_i - \mu)^t \Sigma^{-1} (\bar{x}_i - \mu) \quad (3.2)$$

El problema aparece cuando no conocemos el valor de los parámetros que intervienen en el cálculo del estadístico  $T^2$ , por lo que debemos estimarlos. Si tenemos  $p$  variables y  $m$  muestras de tamaño  $n$ , la media y cuasivarianza muestral se calculan como:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{jk} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ijk} \quad \begin{cases} j = 1, 2, \dots, p \\ k = 1, 2, \dots, m \end{cases} \\ S_{jk}^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{jk})^2 \quad \begin{cases} j = 1, 2, \dots, p \\ k = 1, 2, \dots, m \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

---

<sup>24</sup> Esta matriz de varianzas-covarianzas va a ser una matriz simétrica en cuya diagonal principal se van a encontrar las varianzas de las variables que intervienen en el análisis y fuera de esa diagonal las covarianzas que nos miden la relación existente entre las distintas variables.

donde  $x_{ijk}$  es la  $i$ -ésima observación en la  $j$ -ésima característica en la muestra  $k$ .

La cuasicovarianza entre dos características de calidad  $j$  y  $h$  se calcula para la muestra  $k$  como:

$$S_{jhk} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{jk}) (x_{ihk} - \bar{x}_{hk}) \quad \begin{cases} k = 1, 2, \dots, m \\ j \neq h \end{cases} \quad (3.4)$$

Con la expresión (3.3) podemos determinar la media y varianza para las  $m$  muestras y con estos valores estimar la media y varianza, para cada una de las variables, promediando para las  $m$  muestras obtenidas. Estas medias y varianzas, así como el valor de la covarianza para cada característica de calidad se estimarían como:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{x}} &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \bar{x}_{jk} \quad j = 1, 2, \dots, p \\ \bar{S}_j^2 &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S_{jk}^2 \quad j = 1, 2, \dots, p \\ \bar{S}_{jk} &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S_{jhk} \quad j \neq h \end{aligned} \quad (3.5)$$

Si usamos estos valores para calcular la distancia  $T^2$  de Hotelling, vamos a tener que la expresión de esta distancia queda de la siguiente forma:

$$T_i^2 = n (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^t S^{-1} (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}) \quad (3.6)$$

Si manejamos observaciones individuales, esta forma de estimar la matriz de varianzas-covarianzas no va a ser adecuada, ya que obtendríamos una sobreestimación de dicha matriz. Además de poder estimar la matriz de varianzas-covarianzas directamente a través de la información muestral, existen dos alternativas para estimar esta matriz de una forma más adecuada.

Una de ellas consiste en agrupar las observaciones en submuestras del mismo tamaño; esto crea una correlación entre la matriz de covarianzas de esas submuestras, de tal forma que usando los estimadores analizados anteriormente podremos obtener una estimación de la matriz de varianzas-covarianzas del proceso y del vector de medias mediante el promedio de las estimaciones hechas para cada subgrupo. Otra forma fue propuesta por Sullivan y Woodall (1996)<sup>25</sup>, consistente en usar las diferencias entre pares sucesivos de observaciones. Las ecuaciones a utilizar en este método serían las siguientes:

$$v_i = X_{i+1} - X_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m-1$$

$$\hat{S} = \frac{1}{2} \frac{V^t V}{(m-1)}$$

donde  $V$  es una matriz formada por los vectores  $v_i$  para cada una de las variables que estamos analizando. De esta forma, tendríamos una estimación de la matriz de varianzas-covarianzas menos sensible a la presencia de outliers u observaciones fuera de control dentro del conjunto de observaciones originales.

Los límites de control para el gráfico  $T^2$  de Hotelling los vamos a determinar de tal forma que, cuando estamos bajo control la probabilidad de una falsa alarma tome el valor " que consideremos, normalmente 0,0027. Para datos agrupados en muestras el estadístico  $T^2$  de Hotelling, cuando se conocen los parámetros poblacionales :  $\bar{\mu}$  y  $\mathbf{G}$ , sigue una distribución Chi cuadrado con  $p$  grados de libertad. Por contra, cuando no se conocen los valores poblacionales y hay que estimarlos, la distribución que describe el estadístico  $T^2$  viene dada por una  $F$  de Snedecor y la ecuación de estos límites de control <sup>26</sup> va a venir dada como:

---

<sup>25</sup> Esta propuesta ha sido usada en Vargas (2003) como una alternativa a la estimación clásica de los parámetros del gráfico de control  $T^2$  de Hotelling. Además, compara esta alternativa con distintas alternativas de estimación robustas.

<sup>26</sup> Aunque en el trabajo de Alt (1985) se recogen límites de control distintos dependiendo de que estemos en la fase I o II, nosotros vamos a recoger únicamente límites para la fase I, ya que esta fase constituye el centro de atención de este trabajo.

$$LSC = \frac{p(m-1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha, p, mn-m-p+1}$$

$$LIC=0$$

Así podemos analizar si el proceso se encuentra bajo control o no mediante la representación gráfica de cada uno de los valores  $T^2$  junto a dicho límite de control. De tal forma que, cuando el valor  $T^2$  para todas las muestras sea inferior al LSC, el proceso se considera bajo control y en caso contrario existe una anomalía que nos lleva a una situación fuera de control.

En el caso del gráfico de control  $T^2$  de Hotelling para observaciones individuales<sup>27</sup>, si se conocen los parámetros poblacionales, la distribución del estadístico  $T^2$  va a ser una chi cuadrado y, por contra, si no se conocen los parámetros poblacionales es necesario distinguir dos situaciones: en el primer caso, si el vector de observaciones es independiente de las estimaciones de los parámetros, es decir, no es usado en la estimación de los parámetros, el límite superior de control va a venir dado por:

$$LSC = \frac{p(m+1)(m-1)}{m^2 - mp} F_{\alpha, p, m-p}$$

O bien, cuando toda la información que contiene el vector de observaciones es usada en la estimación de los parámetros en cuyo caso el límite de control va a ser:

$$LSC = \frac{(m-1)^2}{m} \beta_{\alpha, p/2, (m-p-1)/2}$$

El gráfico de control  $T^2$  de Hotelling, igual que el gráfico Shewhart univariante, es sensible a grandes cambios, pero cuando las variaciones son de pequeña cuantía pierde eficacia. Igual que ocurría en el caso univariante va a ser necesario recurrir bien a la extensión multivariante de los gráficos de control

---

<sup>27</sup> Las propiedades distribucionales del estadístico  $T^2$  han sido ampliamente analizadas por Tracy, Young y Mason (1992) y Mason y Young (2002)

EWMA y CUSUM (MEWMA y MCUSUM) o bien, al aumento de la potencia del gráfico de control  $T^2$  de Hotelling mediante la inclusión de señales adicionales similares a las recogidas en las reglas WECO<sup>28</sup>.

En las técnicas gráficas de control multivariante, detectar una situación fuera de control es relativamente fácil, ya que el análisis es similar al caso univariante, pero determinar las causas que han provocado ese cambio va a ser más complicado. Una situación fuera de control puede deberse a la situación de una variable fuera de control o a un cambio en la relación existente entre las variables. Se han desarrollado algunas técnicas para ayudar en la interpretación de las señales fuera de control, si bien, la más utilizada consiste en analizar gráficos de control univariantes para cada una de las características de calidad. Este camino presenta ciertos inconvenientes: el primero es que cuando hay muchas variables, esta técnica tiende a ser tediosa, ya que hay muchos gráficos univariantes para analizar; y el segundo y tal vez más importante es que normalmente una señal fuera de control no es causada sólo por una variable, sino más bien por la relación existente entre variables<sup>29</sup>, por lo que en muchas situaciones los gráficos univariantes no van a mostrar señales fuera de control y, por lo tanto, no van a permitir determinar de donde proceden las causas de la situación fuera de control multivariante.

Para facilitar la interpretación de señales fuera de control en gráficos multivariantes hay distintas propuestas en la literatura especializada entre las que destacan: Alt (1985) desarrolló gráficos de medias individuales con un control tipo Bonferroni, Hayter y Tsui (1994) utilizaron un procedimiento de intervalos de confianza simultáneos tipo Bonferroni para cada una de las características de

---

<sup>28</sup> Un análisis más detallado de la inclusión de señales adicionales en el gráfico de control  $T^2$  para aumentar su potencia puede encontrarse en Aparisi (2001).

<sup>29</sup> Si analizamos dos variables que presentan una alta correlación positiva puede producirse una situación fuera de control debido a la desviación de una de estas variables respecto a la media del proceso, pero también puede que las desviaciones respecto a la media del proceso de las dos variables sean iguales y no aparezca ninguna situación fuera de control. Por contra, en ocasiones se producen movimientos de las variables en sentido contrario, mostrando una correlación negativa entre las variables, situación considerada como fuera de control desde una óptica multivariante y no detectada con los gráficos univariantes.

calidad. Estos intervalos de confianza son esencialmente unos sustitutos de los gráficos de control de media individuales y suelen ser más efectivos en la identificación de la variable que causa la señal fuera de control. Para la interpretación de señales fuera de control dadas por los gráficos de control multivariantes también se puede recurrir a la descomposición del estadístico  $T^2$  de forma que nos mida la influencia de cada una de las variables. Si  $T^2$  es el valor del estadístico, y  $T_{(i)}^2$  es el valor de ese estadístico para todas las variables del proceso excepto la  $i$ -ésima. Podemos calcular un indicador de la contribución de la variable  $i$ -ésima sobre el conjunto de la siguiente forma:

$$d_i = T^2 - T_{(i)}^2$$

Cuando aparece una situación fuera de control en un gráfico de control multivariante es conveniente calcular esta contribución para cada una de las variables y centrar nuestra atención en aquellas variables cuya contribución sea superior.

Siguiendo otros enfoques: Jackson (1980) propone representar componentes principales en lugar de las variables originales con el posible problema de interpretación de dichas componentes, Murphy (1987) recomienda un método que consiste en desarrollar un procedimiento basado en un análisis discriminatorio que nos permite agrupar las observaciones en grupos y Mason, Tracy y Young (1995) proponen una descomposición del estadístico  $T^2$  de una forma más compleja que la anterior. Esta descomposición del estadístico  $T^2$  aparece recogida en Mason y Young (2002) y consiste en dividir  $T^2$  en dos componentes: uno que denominamos  $T^2$  no condicionada, que recoge el valor del estadístico  $T^2$  para cada una de las variables y otro denominado  $T^2$  condicionada que recoge el comportamiento de dicho estadístico basado en los residuos de la regresión de cada variable sobre las



demás. De esta forma, se pretende recoger las variaciones que se producen en la estructura de correlación de las variables<sup>30</sup>.

Por lo tanto, es conveniente no utilizar el gráfico de control  $T^2$  de Hotelling de forma aislada, sino complementado con algunas de las técnicas de análisis de señales fuera de control descritas. De esta forma, vamos a tener una interpretación más clara de los resultados obtenidos. A continuación, vamos a analizar la estructura de los gráficos de control MEWMA y MCUSUM desarrollados para dar una solución al pobre comportamiento del gráfico  $T^2$  ante cambios de pequeña magnitud.

---

<sup>30</sup> Esta descomposición propuesta por Mason, Tracy y Young (1996) denominada en algunos manuales descomposición MYT, esta implementada en el paquete estadístico QualStat<sup>TM</sup>.

### 3. 3. GRÁFICO MEWMA ( EWMA MULTIVARIANTE)

Estos gráficos de control son la extensión multivariante de los gráficos de control EWMA y pueden ser de dirección invariante o específica. El ARL en los gráficos de dirección invariante va a venir determinado por la distancia existente entre el valor de la media muestral y el valor de la media cuando estamos situados bajo control (valor objetivo), mientras que en el gráfico de dirección específica el ARL es una función de la distancia, pero también tiene en cuenta la dirección de ésta desviación.

El gráfico multivariante EWMA (MEWMA) es una extensión sencilla de la versión univariante, el modelo para un gráfico EWMA univariante venía dado por:

$$z_i = \lambda \cdot \bar{x}_i + (1 - \lambda) \cdot z_{i-1} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m \quad (3.7)$$

donde  $\lambda$  es una constante que va a determinar el peso o importancia que le estamos dando a las observaciones de períodos pasados ( $0 < \lambda < 1$ ),  $\bar{x}_i$  es la media aritmética de las observaciones recogidas dentro de la submuestra  $i$ -ésima y  $z_i$  es el  $i$ -ésimo valor EWMA.

La extensión multivariante de la ecuación (3.7) tiene la siguiente forma:

$$Z_i = \Lambda \cdot \bar{X}_i + (1 - \Lambda) \cdot Z_{i-1} \quad (3.8)$$

donde:

- $Z_i$  es el  $i$ -ésimo vector de valores EWMA.
- $\bar{X}_i$  es el vector de las medias muestrales de cada variable.
- $i = 1, 2, \dots, m$  es el número de muestra.

- $\mathbf{\Gamma}$  es una matriz diagonal formada por los valores lambda para las distintas variables ( $\mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2, \dots, \mathbf{\Gamma}_p$ ).

- $p$  es el número de variables, este valor nos va a determinar el número de elementos en cada vector.

A partir de estos valores MEWMA habrá que calcular un estadístico que utilizaremos para analizar el estado del proceso, este estadístico adopta la expresión:

$$T_i^2 = Z_i' \cdot \Sigma_{z_i}^{-1} \cdot Z_i \quad (3.9)$$

donde  $\Sigma_{z_i}^{-1}$  es la matriz de varianzas-covarianzas de los valores EWMA.

Ha sido mostrado por Lowry y otros (1992) que el elemento (k, l) de la matriz de varianzas-covarianzas de los valores EWMA,  $\Sigma_{z_i}$ , es:

$$\Sigma_{z_i}(k, l) = \lambda_k \lambda_l \frac{[1 - (1 - \lambda_k)^i (1 - \lambda_l)^i]}{[\lambda_k + \lambda_l - \lambda_k \lambda_l]} \sigma_{k,l} \quad (3.10)$$

donde  $\sigma_{k,l}$  es el elemento (k, l) de la matriz de varianzas-covarianzas de las variables.

Si el valor de los parámetros lambda es igual para todas las variables que estamos analizando, la expresión anterior se puede simplificar y quedaría como:

$$\Sigma_{z_i} = \frac{\lambda}{2 - \lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2i}] \Sigma \quad (3.11)$$

donde  $\Sigma$  es la matriz de varianzas-covarianzas de las variables.

Para grandes valores de  $i$ , la expresión  $[1 - (1 - \lambda)^{2i}]$ , se aproxima mucho a uno, de ahí que en algunos casos la matriz de varianzas-covarianzas de los valores EWMA venga definida de la siguiente forma:

$$\Sigma_{z_i} = \frac{\lambda}{2 - \lambda} \Sigma \quad (3.12)$$

Existen distintos trabajos, entre los que cabe destacar Lowry y otros (1992) y Prabhu y Runger (1997), en los que se analiza el comportamiento de este gráfico de control en términos de ARL. Este análisis se lleva a cabo para distintos valores del: parámetro **8**(considerado igual para todas las variables), límite de control ( $H$ ), número de variables  $p$  y tamaño del cambio que queremos detectar dado en términos de lo que se denomina parámetro de no centralidad:

$$\delta = (\mu' \Sigma^{-1} \mu)^{1/2}$$

Los principales resultados del trabajo de Prabhu y Runger (1997) aparecen recogidos en la tabla 3.1. Esta tabla nos puede servir de guía a la hora de determinar los parámetros del gráfico MEWMA. Además, Molnau, Montgomery y Runger (2001) proponen un programa para calcular el comportamiento del ARL de una gráfico de control EWMA.

Tabla 3.1: Recorrido Medio de Racha gráfico MEWMA (ARL)						
		<b>8</b>				
		<b>0,05</b>	<b>0,1</b>	<b>0,2</b>	<b>0,3</b>	<b>0,4</b>
<b>P</b>	<b>*</b>	<b>H=7,35</b>	<b>H=8,64</b>	<b>H=9,65</b>	<b>H=10,08</b>	<b>H=10,31</b>
<b>2</b>	<b>0</b>	199,93	199,98	199,91	199,82	199,83
	<b>0,5</b>	26,61	28,07	35,17	44,1	53,82
	<b>1</b>	11,23	10,15	10,2	11,36	13,26
	<b>2</b>	5,28	4,42	3,78	3,56	3,53

<b>Tabla 3.1: Recorrido Medio de Racha gráfico MEWMA (ARL)</b>						
		<b>8</b>				
		<b>0,05</b>	<b>0,1</b>	<b>0,2</b>	<b>0,3</b>	<b>0,4</b>
		<b>H=11,22</b>	<b>H=12,73</b>	<b>H=13,87</b>	<b>H=14,34</b>	<b>H=14,58</b>
<b>4</b>	<b>0</b>	199,84	200,12	199,94	199,91	199,96
	<b>0,5</b>	32,29	35,11	46,3	59,28	72,43
	<b>1</b>	13,48	12,17	12,67	14,81	18,12
	<b>2</b>	6,31	5,19	4,41	4,2	4,24
		<b>H=14,60</b>	<b>H=16,27</b>	<b>H=17,51</b>	<b>H=18,01</b>	<b>H=18,26</b>
<b>6</b>	<b>0</b>	200,11	200,03	200,11	200,18	199,81
	<b>0,5</b>	36,39	40,38	54,71	70,3	85,1
	<b>1</b>	15,08	13,66	14,63	17,71	22,27
	<b>2</b>	7,05	5,74	4,88	4,68	4,8

Fuente: Prabhu y Runger (1997).

El MEWMA permite usar pesos específicos para cada variable medidos en términos del valor **8** de cada variable. Aquí es donde entra en juego la diferencia entre un análisis direccional o un análisis sin dirección específica. Si se decide usar el mismo peso para todas las variables, entonces, el gráfico es de dirección invariante debido a que las causas de variación llevan igual peso en todas las variables. Sin embargo, si damos distinto peso a las variables, el gráfico se va a considerar de dirección específica y, en este caso, una señal fuera de control puede ser atribuida a los valores específicos de aquella variable a la que hemos otorgado un mayor peso.

Ha sido demostrado por distintos autores entre los que cabe destacar a Runger y Prabhu (1996), mediante el análisis de los valores del ARL calculados para distintos cambios en la media del proceso, que este gráfico MEWMA, igual que pasaba en el caso univariante, es más rápido en su respuesta ante pequeños cambios

en la media del proceso. Esta rápida respuesta representa una gran ventaja respecto a otros modelos de control multivariantes, si bien, va a ser menos efectivo que el gráfico  $T^2$  de Hotelling en la detección de grandes cambios en el proceso.

### **3.4. GRÁFICO MCUSUM (CUSUM MULTIVARIANTE)**

Igual que ocurría con el gráfico de control MEWMA, existe también la extensión multivariante del gráfico de control de sumas acumuladas que vamos a denotar como MCUSUM. Se pueden utilizar dos aproximaciones distintas para aplicar un CUSUM al caso multivariante: una es un análisis de forma simultánea de varios procedimientos CUSUM univariantes; y la otra consiste en realizar una modificación del esquema CUSUM para procesos multivariantes. Por lo tanto, el primer método consiste en reducir las observaciones multivariantes a un escalar y elaborar un CUSUM de escalares, mientras que el segundo método consiste en elaborar un MCUSUM directamente para las observaciones.

La primera extensión multivariante del gráfico CUSUM aparece en Woodall y Ncube (1985) sugieren que para detectar un cambio en el vector de medias de un proceso con una distribución normal multivariante, lo mejor era recurrir a la elaboración de esquemas CUSUM univariantes de forma simultánea y evaluar el comportamiento de este conjunto de esquemas. Este procedimiento se va a ver afectado por la dirección del cambio<sup>31</sup> que se produzca en el vector de medias, y presenta un ARL bajo control inferior al del gráfico CUSUM univariante. El problema del efecto de la dirección del cambio puede verse aliviado con la utilización de componentes principales en lugar de las variables originales.

---

<sup>31</sup> La sensibilidad a la dirección del cambio del gráfico de control múltiple se va a ver aumentada en el caso de que las variables estén correlacionadas.

Posteriormente, Healy (1987) propuso utilizar un gráfico CUSUM sobre una combinación lineal de las variables para, de esta forma, detectar más rápidamente cambios en la media producidos en una dirección determinada. Crosier (1988) propuso dos procedimientos para elaborar un gráfico de control CUSUM multivariante: el primero de ellos consiste en la aplicación de un gráfico CUSUM sobre la raíz cuadrada de los valores  $T^2$  obtenidos al desarrollar un gráfico  $T^2$  de Hotelling; el otro procedimiento consiste en establecer directamente un gráfico CUSUM sobre los vectores de observaciones. Es decir, en el primer caso transformamos la información en un escalar y aplicamos sobre este escalar el gráfico de control CUSUM, mientras que en el segundo se utiliza directamente la información que tenemos para determinar el gráfico MCUSUM. El segundo procedimiento, que presenta un mejor comportamiento en términos del ARL, está basado en los estadísticos:

$$C_i = ((S_{i-1} + x_i - \mu_0)' \Sigma^{-1} (S_{i-1} + x_i - \mu_0))^{1/2}$$

donde:

$$\begin{aligned} S_i &= 0 & \text{si } C_i \leq k \\ S_i &= (S_{i-1} + x_i) (1 - k / C_i) & \text{si } C_i > k \end{aligned}$$

para  $i=1, 2, \dots$ ,  $S_0 = 0$  y  $k = \delta^2/2$ , siendo  $\delta$  el tamaño del cambio en la media que queremos detectar<sup>32</sup>. Este gráfico de control MCUSUM va a detectar una situación fuera de control cuando:

$$Y_i = (S_i' \Sigma^{-1} S_i)^{1/2} > h_2$$

El valor de  $h_2$  se fija buscando un comportamiento determinado del gráfico MCUSUM en términos de  $ARL_0$ .

---

<sup>32</sup> Este parámetro suele tomar un valor unitario dando lugar a un valor  $k$  igual al usado en el caso univariante.

Uno de los gráficos MCUSUM con mejor comportamiento en términos de ARL para detectar cambios de una forma rápida fue desarrollado por Pignatiello y Runger (1990). En este artículo se proponen dos procedimientos de control CUSUM multivariantes basados en formas cuadráticas del vector de medias, la diferencia entre estos dos procedimientos se centra en la forma en la que se lleva a cabo la acumulación. En el primer procedimiento, que se denomina MC<sub>1</sub>, se acumula el vector de observaciones antes de determinar la forma cuadrática, mientras que en el segundo, denominado MC<sub>2</sub>, se determina la forma cuadrática de cada vector de observaciones y, entonces, se acumulan estas formas cuadráticas. El MC<sub>1</sub> está basado en el siguiente vector de sumas acumuladas multivariante:

$$C_i = \sum_{j=i-n_i+1}^i (\bar{x}_j - \mu_0)$$

con este vector se construye el gráfico de control multivariante mediante la definición de MC<sub>1</sub> como:

$$MCI_i = \max [\|C_i\| - k \cdot n_i; 0]$$

siendo:

$$\begin{aligned} \|C_i\| &= \sqrt{C_i' \cdot \Sigma^{-1} \cdot C_i} \\ n_i &= \begin{cases} n_{i-1} & \text{si } MCI_{i-1} > 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde  $\|C_i\|$  es la norma de  $C_i$ ,  $n_i$  es el número de orden correspondiente a cada muestra que vamos incorporando y  $k$  es un valor de referencia dependiente solamente de la magnitud del cambio que queremos detectar. Igual que ocurría en el caso univariante, este valor  $k$  es considerado normalmente como  $1/2$ .



La forma de interpretar este gráfico de control MCUSUM es similar al caso univariante, habrá que representar gráficamente cada uno de los valores del estadístico calculado junto con un límite de control. Este límite de control se sitúa normalmente a la mitad del tamaño del cambio en la media que queremos detectar. El comportamiento del ARL de este gráfico de control  $MC_1$  es similar al propuesto por Crosier (1988).

El gráfico de control  $MC_2$  está basado en la determinación de las sumas acumuladas a partir del cuadrado de la distancia de cada media muestral al valor objetivo ( $\mu_0$ ). Para construir este gráfico de control tendremos que determinar el estadístico:

$$D_i^2 = (x_i - \mu_0)' \Sigma^{-1} (x_i - \mu_0)$$

este estadístico sigue una distribución  $\mathbf{P}^2$  con  $p$  grados de libertad cuando el proceso está bajo control y una distribución  $\mathbf{P}^2$  no central cuando el proceso está fuera de control. A partir de este estadístico podemos determinar un gráfico de control CUSUM a un lado como:

$$MC2_t = \max\{0, MC2_{t-1} + D_t^2 - k\}$$

con  $MC2_0 = 0$ .

Como puede verse en Pignatiello y Runger (1990), el gráfico de control propuesto por Woodall y Ncube (1985) y el  $MC_1$  tienen el mismo comportamiento, en términos de ARL, cuando se produce un cambio en la media del proceso que solamente afecta a una de las variables. Por contra, si el cambio afecta a más de una de las variables, el gráfico de control  $MC_1$  se comporta mejor. Esta mejoría en el comportamiento se ve aumentada cuando las variables no presentan un comportamiento independiente. La siguiente tabla resume el comportamiento en términos de ARL de las principales propuestas de gráficos MCUSUM para el caso de dos variables independientes ante distintos valores del parámetro de no

centralidad. Esta tabla ha sido obtenida a partir de los trabajos de Pignatiello y Runger (1990) y Crosier (1988).

<b>Tabla 3.2: Recorrido Medio de Racha gráfico MCUSUM (ARL)</b>					
<b>*</b>	<b>MC<sub>1</sub></b>	<b>MC<sub>2</sub></b>	<b>Crosier</b>	<b>W&amp;N</b>	<b>T<sup>2</sup></b>
<b>0</b>	202,81	200	200	200,45	200,3
<b>0,5</b>	30,99	85,3	28,8	38,85	115,7
<b>1</b>	9,31	22,1	9,35	11,88	42
<b>2</b>	3,69	4,9	4,2	6,45	6,9
<b>3</b>	2,42	2,4	2,78	3,02	2,2
	<b>k=0,5</b> <b>LSC =</b> <b>4,75</b>	<b>k=2,5</b> <b>LSC =</b> <b>13,5</b>	<b>k=0,5</b> <b>h<sub>2</sub> = 5,50</b>	<b>k=0,5</b> <b>h = 4,83</b>	<b>k=0,5</b> <b>LSC =</b> <b>4,75</b>

Fuente: Elaboración propia a partir de Pignatiello y Runger (1990) y Croiser (1988).

Como se puede observar el gráfico de control MC<sub>1</sub> y el propuesto por Crosier (1988) son los gráficos que presentan un mejor comportamiento en la detección de pequeños cambios en la media del proceso. Además, estos resultados se pueden generalizar al caso en el que el número de variables sea superior a dos, obteniendo un resultado todavía mejor cuando las variables no sean independientes



### **3.5. PROBLEMÁTICA DE LOS GRÁFICOS DE CONTROL CLÁSICOS**

Cuando llevamos a la práctica las técnicas que hemos analizado en los apartados anteriores (gráficos de control clásicos univariantes y multivariantes) nos vamos a encontrar con ciertos problemas en las suposiciones de partida. Hacemos referencia al cumplimiento de las suposiciones de normalidad e independencia en el comportamiento de las variables, por lo que habrá que analizar la robustez de estos gráficos de control, así como, su comportamiento ante observaciones no independientes.

En cuanto a la normalidad, si bien la mayoría de los procesos tienen un comportamiento que se puede aproximar bastante bien a una distribución normal, existen ocasiones en las que ese comportamiento normal no puede ser asumido. Estas situaciones han sido analizadas por distintos autores entre los que cabe destacar a: Burr (1967), Shilling y Nelson (1976), Chan, Hapuarachchi, y Macpherson (1988) y Yourstone y Zimmer (1992), llegando a la conclusión de que el incumplimiento de esta suposición no tiene grandes efectos en el comportamiento de los métodos desarrollados anteriormente. Esto se debe a que estos métodos se muestran bastante robustos ante esta suposición de normalidad, por lo tanto, estos métodos pueden ser empleados, salvo que la población sea extremadamente no normal, sin incurrir en un excesivo error en su aplicación. Incluso Schilling y Nelson (1976) desarrollaron una aplicación de estas técnicas para variables con una distribución uniforme, gamma y una distribución bimodal. Estos estudios muestran que, en muchos casos, tamaños muestrales de 4 ó 5 observaciones eran suficientes para obtener una razonable robustez ante el incumplimiento de la suposición de normalidad y solamente en casos extremos de no normalidad estas técnicas presentaban algún problema.

Además de estos estudios existen distintos trabajos desde un punto de vista no paramétrico. Estos estudios intentan paliar el posible efecto negativo que puede suponer la existencia de un comportamiento no normal en las observaciones mediante la no suposición de distribución alguna en las observaciones. Entre los trabajos desarrollados en este sentido caben destacar los trabajos de: Liu (1990) y Liu y Singh (1993) que desarrollan un gráfico de control univariante basado en lo que denominan “data depth”(profundidad de los datos). Esta “depth” se puede determinar mediante lo que denominan “simplicial depth” o mediante la distancia de Mahalanobis, ya que esta profundidad para un punto  $y$  es inversamente proporcional a la distancia cuadrática a la media. Usando esta profundidad en los datos, pero desde un punto de vista multivariante podemos encontrar el trabajo de Liu (1995). Por otro lado, Liu y Tang (1997) proponen que cuando no estamos seguros de la normalidad de las observaciones se puede usar un método bootstrap para determinar los límites de control, considerando que la estimación de la distribución muestral por este método es en general mejor que la aproximación normal basada en el teorema central del límite. Además, este método de determinación de la distribución muestral se puede extender al caso de observaciones no independientes mediante la consideración de un método bootstrap con bloques móviles (moving blocks bootstrap).

Otro aspecto que puede ser analizado es la robustez en el comportamiento de los gráficos de control ante la presencia de outliers. En los últimos años se ha producido un aumento en la preocupación<sup>33</sup> por analizar el comportamiento de los gráficos de control en la fase I ante la presencia de observaciones atípicas, así como, el desarrollo de métodos alternativos que presenten un comportamiento más robusto. Entre los trabajos desarrollados para tratar esta problemática podemos destacar, desde una óptica univariante: Langenberg (1983), Rocke (1989), Ryan (1997) y Yi Dou y Ping Sa (2002). Dentro de estos trabajos desarrollados desde una óptica univariante, tal vez el más general, es el trabajo de Niang (2002) que

---

<sup>33</sup> Esta mayor preocupación por la robustez en control de calidad no es exclusiva de los gráficos de control sino que ha sido generalizada en la mayoría de métodos estadísticos de control de calidad fuera de línea (off-line).

considera grupos de observaciones para cada una de las variables y utiliza estimadores robustos de posición de las familias de los *M-Est.* y *W-Est.* Otros trabajos en esta línea son los realizados por Vargas (2003), en el que se estudia el control de calidad desde una óptica multivariante para observaciones individuales considerando distintas alternativas robustas y Alfaro y Ortega (2003), en el que se analiza una aplicación de las medias truncadas en la elaboración del gráfico de control  $T^2$  de Hotelling para observaciones individuales.

Como se puede comprobar todos los trabajos son relativamente recientes lo que indica el mayor impulso que está recibiendo la aplicación de métodos robustos en el desarrollo de métodos estadísticos de control de la calidad. La mayoría de las aportaciones desarrolladas consisten en la sustitución de los estimadores clásicos usados en control de calidad por estimadores que presenten un comportamiento robusto ante la presencia de outliers. En el capítulo 4 de este trabajo va a ser desarrollada una novedosa aplicación de los métodos robustos en control estadístico de la calidad. En concreto, abordaremos una alternativa a la estimación clásica de los parámetros en el período base mediante la utilización de estimadores robustos, procedentes de la familia denominada medias truncadas. De esta forma vamos a obtener un gráfico de control que, desde un planteamiento robusto, presente menos sensibilidad ante observaciones atípicas y no precise de tediosos cálculos iterativos para obtener las estimaciones finales de los parámetros. Es importante resaltar que este procedimiento es de gran utilidad en la fase I o período base del control estadístico de la calidad, ya que en la fase II la utilización de estos métodos pueden llevarnos a conclusiones erróneas, con este procedimiento obtenemos una estimación de los parámetros para desarrollar el gráfico de control en la fase II sin necesidad de desarrollar cálculos iterativos para ajustar las estimaciones.

Si analizamos la independencia, vemos que en la mayoría de los procesos industriales esta independencia no se produce. Dentro de esta correlación (ausencia de independencia) que existe en los procesos industriales vamos a diferenciar dos tipos de correlación: la correlación cruzada y la autocorrelación. Cuando hablamos de correlación cruzada nos estamos refiriendo a la correlación existente entre las

distintas variables, suponiendo que estamos analizando más de una variable, esta correlación debe de ser tomada en cuenta cuando se lleva a cabo un control de calidad multivariante. Mientras que cuando hablamos de autocorrelación nos estamos refiriendo a la dependencia existente entre observaciones de la variable y posteriores observaciones de la misma. Esta autocorrelación puede ocurrir tanto en procesos multivariantes como univariantes.

La correlación cruzada se tiene en cuenta en los métodos multivariantes de control de calidad mediante la utilización en los cálculos de la matriz de varianzas-covarianzas, que es usada en casi todas las técnicas de control de calidad multivariantes, pero desafortunadamente la autocorrelación no se puede tener en cuenta de una forma tan sencilla. Los efectos de esta autocorrelación han sido analizados en los últimos años, tiende a disminuir la longitud media de racha (ARL del inglés average run length) cuando el proceso está bajo control, por lo que aumenta el número de señales fuera de control que ocurren, pero estas señales van a ser debidas más bien a los métodos de control usados para controlar y analizar los datos que al proceso o sistema que estamos analizando. Por lo tanto, para evitar este aumento en el ratio de falsas alarmas va a ser necesario aplicar una serie de técnicas que nos permitan controlar o eliminar en cierto modo esta autocorrelación. Si bien existe un gran desarrollo de estas técnicas en modelos univariantes, en el caso multivariante, el desarrollo de estas técnicas para disminuir el efecto o incluso eliminar la autocorrelación sin perder la óptica multivariante es escaso.

Entre estas técnicas caben destacar por su importancia y mayor desarrollo la aplicación de modificaciones en los límites de control (límites de control empíricos) y el desarrollo de modelización de series temporales. En el primer caso se establecen los límites de control de manera que se tenga un comportamiento determinado del gráfico de control en términos de ARL. En este caso se recomienda representar gráficamente las observaciones originales y llevar a cabo una modificación de los límites de control. Entre los trabajos más destacados encontramos: Vasilopoulos y Stamboulis (1978) y Schmid (1995) donde se discuten algunas modificaciones del gráfico de control Shewhart para tener en

cuenta la autocorrelación, si bien ha sido demostrado mediante simulación que el ARL bajo control de este gráfico de control es menor que el del gráfico de control Shewhart aplicado sobre los residuos procedentes de un modelo de series temporales. Johnson y Bagshaw (1974), Bagshaw y Johnson (1975) y Schmid (1997a) investigan el efecto de la autocorrelación en el gráfico de control CUSUM y Schmid (1997b) que propone una modificación del gráfico de control EWMA para considerar la autocorrelación.

Vasilopoulos y Stamboulis (1978) desarrollan una modificación de los límites de control del gráfico de medias y desviaciones típicas cuando la autocorrelación presente en las observaciones puede modelizarse mediante un modelo AR(2). Aplican su trabajo a un ejemplo particular y muestran que cuando la autocorrelación está presente, pero no es reconocida (suponemos independencia), se van a llevar a cabo intentos erróneos para encontrar una causa asignable cuando realmente esta causa no está presente.

Wieringa (1999) lleva a cabo un análisis del comportamiento de los principales gráficos de control univariantes<sup>34</sup> ante la aplicación de modificaciones en los límites de control para procesos AR(1), llegando a la conclusión de que ante la presencia de autocorrelación negativa el comportamiento en la curva del ARL del gráfico modificado coincide prácticamente con la curva correspondiente para observaciones independientes. Por otro lado, cuando la autocorrelación es positiva el gráfico presenta un comportamiento peor, aunque para valores inferiores a 0,6 las diferencias respecto al caso de independencia son pequeñas, aumentando ante autocorrelación positiva elevada. Este comportamiento se debe al sesgo introducido al considerar la varianza de las observaciones como si fueran independientes. Para el caso de un proceso modelizado mediante un AR(1) tenemos que la varianza de las observaciones se determina como:

---

<sup>34</sup> Gráficos de control Shewhart, CUSUM y EWMA ante observaciones autocorreladas con comportamiento del proceso autorregresivo de orden 1 (AR(1)). Se analiza el comportamiento de las distintas alternativas desarrolladas para controlar procesos univariantes autocorrelacionados como son: gráficos modificados, gráficos para los residuos y una combinación de los dos denominada gráficos de control para los residuos modificados.



$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma^2}{(1 - \phi^2)} \quad (3.14)$$

donde  $\sigma_x^2$  representa la varianza de un conjunto de observaciones AR(1),  $\sigma^2$  representa la varianza de las perturbaciones que son independientes, y  $\phi$  mide la autocorrelación existente en las observaciones. De esta forma, la varianza de las observaciones va aumentando a medida que  $\phi$  toma valores próximos a cero respecto al caso de independencia, por lo que, si consideramos la varianza como si las observaciones fueran independientes estaríamos influyendo en el comportamiento del ARL.

En base a la información presentada en este trabajo podemos concluir que ante la presencia de autocorrelaciones pequeñas<sup>35</sup> podemos usar los gráficos de control como si se trataran de observaciones independientes sin incurrir en un gran error, tal y como aparece reflejado en el trabajo de Wheeler (1989): “En muchas situaciones, autocorrelaciones significativas van a tener un impacto mínimo sobre los límites del gráfico de control. Los límites de control van a estar contaminados por una cantidad apreciable sólo cuando la autocorrelación sea excesiva (valores superiores o iguales a 0,8)”

Una segunda aproximación consiste en controlar el proceso usando los residuos procedentes de una serie temporal ajustada sobre las observaciones del mismo. Esta metodología va a ser utilizada en este trabajo para abordar el análisis de procesos con un comportamiento claramente autocorrelacionado. En el cuarto bloque de este trabajo abordaremos estas técnicas con mayor amplitud.

Los efectos de la autocorrelación en los gráficos MEWMA y  $T^2$  de Hotelling son muy similares, si bien en el gráfico MEWMA los efectos de esta autocorrelación son menores que en el gráfico  $T^2$  de Hotelling, esto hace que

---

<sup>35</sup> Esta situación es cada día más improbable en la práctica, ya que con el desarrollo de nuevas tecnologías cada día hay disponibles una mayor cantidad de información, recogida en intervalos de tiempo cortos, lo que supone que en la mayoría de las ocasiones la autocorrelación existente sea elevada.

cuando la cantidad de autocorrelación es insignificante en los datos que estamos controlando, el gráfico MEWMA se considera mejor que el Hotelling, ahora bien, si la autocorrelación es elevada, entonces habrá que aplicar alguna técnica que nos permita disminuir los efectos de esta autocorrelación e incluso si es posible llegar a eliminarlos. Este efecto también se nota en el gráfico MCUSUM con un aumento del ratio de falsas alarmas, aunque igual que en el caso anterior, el efecto de esa autocorrelación depende de la magnitud de la misma.

Además de la alternativa aportada en este trabajo de utilización de métodos robustos en control estadístico de la calidad, vamos a desarrollar la aplicación de modelos de series temporales múltiples como método para paliar el efecto negativo que supone la existencia de autocorrelación en las observaciones. Este nuevo enfoque mejora el tratamiento de la autocorrelación muestral sin perder la óptica multivariante. Desde esta óptica, vamos a utilizar la representación de series temporales en espacio de los estados, modelización formalmente equivalente a la habitual VARMA, pero que presenta ventajas analíticas y numéricas que la hacen atractivas en control estadístico de la calidad. Con la aplicación de modelos en espacio de los estados vamos a conseguir dos objetivos que resultan fundamentales a la hora de utilizar las técnicas estadísticas de control de la calidad: por un lado, el filtrado de la información para eliminar la autocorrelación muestral existente mediante la utilización de las innovaciones del modelo y, por otro lado, la obtención de una reducción de la dimensión mediante la utilización de los estados. De esta forma vamos a poder manejar información muestral con cierto grado de autocorrelación sin incurrir en los posibles efectos perniciosos producidos por la misma, así como, manejar toda la información disponible del proceso mediante la utilización de un número elevado de variables reducidas mediante una reducción de la dimensión en los estados del modelo.



## **SEGUNDA PARTE**



## **CAPÍTULO 4**

# **MÉTODOS ROBUSTOS EN CONTROL ESTADÍSTICO DE LA CALIDAD**

### **4.1. INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES**

Dentro de las técnicas estadísticas de control de calidad se ha introducido de una forma clara en los últimos años el concepto de robustez. Cuando hablamos de robustez estamos haciendo referencia básicamente a dos conceptos similares, a la par que distintos: robustez ante el incumplimiento de la hipótesis de partida (en este caso, sobretodo la de normalidad) y robustez ante la presencia de observaciones atípicas. Para intentar analizar la robustez ante el incumplimiento de la hipótesis de normalidad, han sido numerosos los estudios realizados a lo largo de los años, entre los que caben destacar: Burr (1967), Shilling y Nelson (1976), Chan, Hapuarachchi y Macpherson (1988), Liu (1990), Yourstone y Zimmer (1992), Liu (1995) y Liu y Tang (1997). Todos estos estudios están basados, bien en el comportamiento de estas técnicas de control de calidad ante distribuciones no normales (básicamente distribuciones de la familia exponencial), o bien al

desarrollo de técnicas no paramétricas, es decir, técnicas que no se basen en ninguna suposición sobre el comportamiento distribucional del proceso que estamos analizando.

Otra óptica de análisis de la robustez podría centrarse en el estudio del comportamiento de los gráficos de control clásicos ante la presencia de outliers. Cuando hablamos de outliers estamos haciendo referencia a observaciones no genuinas del proceso, que resultan en la mayoría de los casos de errores de medida.

Ahora bien, cabe preguntarse: ¿qué diferencia existe entre una observación fuera de control y una observación atípica? Básicamente resulta muy difícil, salvo que se conozca de una forma muy detallada el proceso productivo, establecer de una forma clara esta diferencia, si bien, hay que tener en cuenta que un matiz importante en la distinción entre este tipo de observaciones se sitúa en la ubicación en la primera fase o en la segunda de control de la calidad. Si nos situamos en la fase I vamos a hablar de observaciones atípicas ya que vamos a considerar estas observaciones como observaciones que afectan en la estimación de los parámetros del gráfico de control y que son observaciones anómalas en el comportamiento normal del proceso. Por contra, si estamos situados en la fase II vamos a hablar de observaciones fuera de control ya que los parámetros van a estar estimados de forma correcta y, por lo tanto, este tipo de observaciones se consideran observaciones fuera de control que recogen una variabilidad en el comportamiento del proceso fuera de lo normal. El objetivo que se persigue es intentar evitar la necesidad de recalcular límites de control y estimaciones de las medidas de posición y escala, para ajustar estas medidas, de forma que recojan de una manera más adecuada el comportamiento del proceso, e incluso, no tener que ser tan precisos en la separación entre lo que hemos denominado como período base y período de vigilancia.

En este punto es importante matizar que estamos haciendo referencia a la fase I del control de la calidad, debido a que al situarnos en la fase II y robustificar estas estimaciones solamente estaríamos tapando posibles observaciones situadas fuera de control. Así, obtendríamos una estimación de los parámetros en la fase I que van a recoger de una forma más adecuada el verdadero comportamiento del proceso. Con estos métodos de estimación podemos evitar la necesidad de cálculos iterativos, eliminando de forma secuencial las observaciones situadas fuera de control para ajustar las estimaciones obtenidas, así como, obtener unos parámetros más ajustados que nos permitan señalar en la fase II de una forma más clara las observaciones situadas fuera de control.

Dentro de los intentos de robustificar las técnicas estadísticas de control de la calidad ante la presencia de observaciones atípicas, han sido desarrollados distintos estudios, si bien, todos ellos tienen un factor común; están basados en la sustitución de los estimadores clásicos de posición y/o escala por estimadores robustos. Estos estimadores van a presentar un mejor comportamiento ante la presencia de observaciones anómalas que sean resultado de algún comportamiento errático inesperado y que, por supuesto, no sean consecuencia de una variación en el proceso. Esta óptica de sustitución de estimadores clásicos por estimadores robustos será la que utilizaremos en este trabajo.

Estos estimadores robustos van a presentar un buen comportamiento ante la presencia esporádica de outliers distribuidos de forma aleatoria. Cuando en el proceso aparezca una nube de puntos situada a cierta distancia del valor objetivo (una nube de outliers), en control de calidad, más que obtener estimaciones robustas que no tengan en cuenta estos outliers, interesa determinar qué ha afectado al proceso para obtener ese conjunto de observaciones alejadas del valor objetivo. No interesa corregir las estimaciones sino corregir el proceso para que no genere ese tipo de observaciones.



Dentro de la aplicación de métodos robustos en control de calidad podemos encontrar los trabajos de: Langenberg e Iglewicz (1983), que desarrollan una aplicación de los estimadores de la familia de medias truncadas en la determinación de los límites de control del gráfico Shewhart, Rocke (1989) que desarrolla un trabajo con un enfoque univariante donde se lleva a cabo una comparación de distintas medidas clásicas y robustas analizando su comportamiento ante muestras contaminadas y Yi Dou y Ping Sa (2002). Por último y más general, desde una óptica univariante, ya que considera grupos de observaciones para cada una de las variables, es el trabajo de Niang (2002), que utiliza estimadores robustos de posición de las familias de los *M-Est.* y *W-Est.*

Otros trabajos en esta línea son los realizados por Ryan (1997), donde se analiza la problemática de la estimación de los parámetros de los gráficos de control de una forma no robusta, y el de Vargas (2003), que estudia el control de calidad multivariante para observaciones individuales considerando distintas alternativas robustas, los estimadores MCD y MVE, para estimar los parámetros del proceso. Además, se desarrolla una comparación del comportamiento del gráfico de control  $T^2$  de Hotelling obtenido usando estos estimadores robustos, con el gráfico obtenido bajo la óptica clásica y la propuesta desarrollada por Sullivan y Woodall (1996) para estimar la matriz de varianzas-covarianzas del proceso. La conclusión obtenida es que la mejor solución es usar dos gráficos al mismo tiempo, uno que nos permita detectar cambios continuos en la media (propone usar un gráfico  $T^2$  con la estimación de la matriz de covarianzas propuesta por Sullivan y Woodall (1996)) y otro sensible a la presencia de outliers (gráfico  $T^2$  con estimadores MVE). El último trabajo que podemos encontrar en el que se lleva a cabo un análisis del comportamiento robusto del gráfico de control  $T^2$  de Hotelling, se encuentra en Alfaro y Ortega (2003) que lleva a cabo una aplicación de las medias truncadas en la elaboración del gráfico de control  $T^2$  de Hotelling para observaciones individuales.

En este capítulo vamos a recoger en la Sección 1 las principales propiedades deseables en el comportamiento de los estimadores robustos. En este sentido, vamos a intentar recoger la relación existente entre esas propiedades en robustez y el comportamiento requerido para estas estimaciones en control estadístico de la calidad. En la Sección 2 vamos a recoger los principales estimadores robustos existentes, haciendo especial hincapié en la familia de estimadores denominada medias truncadas. Estos estimadores constituyen el elemento fundamental de la definición de una nueva medida de control multivariante de la calidad basada en los gráficos de control definidos en el Capítulo 3.

## **4.2. PROPIEDADES EN ROBUSTEZ**

Si bien, no vamos a incidir en las propiedades requeridas a cualquier estimador determinado desde una óptica clásica (insesgadez, eficiencia, consistencia y suficiencia), si vamos a analizar una serie de propiedades específicas de estadística robusta relacionadas con el tratamiento de observaciones atípicas. Entre estas propiedades podemos destacar: la propiedad de ajuste exacto; los conceptos relacionados con las denominadas función de influencia y curva de sensibilidad, el concepto denominado punto de ruptura, de gran interés en la aplicación de estos estimadores en control estadístico de la calidad, y los conceptos conocidos como efectos “Masking” y “Swamping” (Enmascaramiento).

### **Eficiencia y Consistencia**

Aunque son propias de la obtención de cualquier estimador, en este caso es conveniente destacarlas debido al comportamiento que presentan los estimadores robustos ante estas dos propiedades.

En general, cuando hablamos de eficiencia vamos a hacer mención a la eficiencia relativa, de manera que estudiaremos esta característica comparando la

varianza (ó error cuadrático medio si el estimador no es insesgado) del estimador en estudio y el mejor en cada caso. Este concepto de eficiencia va a estar contrapuesto al concepto de robustez de manera que, en general, estimadores poco robustos serán muy eficientes, y estimadores robustos serán poco eficientes<sup>36</sup>. Por lo tanto, cuando llevamos a cabo la determinación de un estimador robusto, va a ser necesario tomar una decisión que suponga un compromiso entre el concepto de eficiencia y robustez, sin dejar de lado ninguno de los dos conceptos. Así, por ejemplo, la media tiene la máxima eficiencia en poblaciones simétricas siendo un estimador de posición poco robusto, y por contra, la eficiencia de la mediana respecto a la media es del 64% con un comportamiento ante la robustez mucho más satisfactorio.

Por otro lado, el concepto de consistencia tiene gran importancia en estudios de robustez, ya que por la complejidad en la definición de algunos estimadores, no es posible más que estudiar su comportamiento asintótico. Si bien, esto no se va a producir en la familia de estimadores conocidos como medias truncadas, que son los que usaremos en este trabajo. En los estimadores de escala incluidos en esta familia, la consistencia va a venir garantizada mediante un coeficiente de consistencia que se utiliza en la determinación de estos estimadores.

## **Equivarianzas**

Una propiedad interesante que deben cumplir los estimadores robustos obtenidos es lo que se conoce como equivarianza. Esta propiedad trata el comportamiento de los estimadores cuando se realizan cambios de posición y/o escala en los datos muestrales. Así, podemos hablar de: un estimador equivariante de posición, equivariante de escala o equivariante afín (que incluye los dos conceptos anteriores). Un comportamiento deseable en la mayoría de estimadores es que sean equivariantes afín. Un estimador de posición  $T_p$  ó  $\hat{\mu}_p$  es equivariante

---

<sup>36</sup> Esto es debido al intercambio que se produce entre variabilidad y robustez, un estimador va a ser más eficiente cuando recoge la mayor parte de la variabilidad existente en la información y, por contra, va a ser robusto cuando se elimine la variabilidad debida a la existencia de observaciones extremas.

afín si y sólo si para algún vector  $b \in \mathbb{R}^p$  y alguna matriz no singular  $A \in \text{Mat}_p(\mathbb{R})$  se cumple que:

$$T_p(A X + b) = A T_p(X) + b \quad (4.1)$$

Un estimador de escala  $T_e \in \text{PDS}(p)$  (conjunto de matrices simétricas definidas positivas  $p \times p$  (PDS)), es equivariante afín si y sólo si para algún vector  $b \in \mathbb{R}^p$  y alguna matriz no singular  $p \times p$   $A \in \text{Mat}_p(\mathbb{R})$  se cumple que:

$$T_e(A X + b) = A T_e(X) A^t \quad (4.2)$$

En control de calidad el cumplimiento de esta propiedad es deseable cuando se utilizan estimadores de posición y escala para determinar una medida que nos permita analizar la situación del proceso (ej.  $T^2$  de Hotelling), ya que si estos estimadores son equivariantes afín, esta medida va a presentar un comportamiento similar, lo que nos va a permitir usar sin pérdida de generalidad distribuciones estandarizadas.

### Ajuste Exacto

Esta propiedad fue propuesta por Donoho (1982) y pretende recoger de una forma estricta la idea que se persigue cuando se elabora un estimador robusto. Se dice que un estimador tiene la propiedad de ajuste exacto si, dada una muestra sobre las variables en estudio, si la mayoría de las observaciones de esta muestra toman el mismo valor, el estimador proporciona un valor exacto, entonces la respuesta mediante el estimador en estudio nos debe proporcionar este valor. Esta propiedad es demasiado estricta y normalmente lo que se hace es diferenciar distintos niveles de cumplimiento en función de la interpretación de la palabra mayoría. En el caso más extremo esta mayoría hace referencia a la mitad más una.

Para los distintos niveles en los que se puede cumplir esta propiedad se usa el concepto de punto de ajuste exacto que se define de la siguiente manera:

Para estimadores de posición y escala, consideramos que  $X$  es la variable de la que tenemos una muestra de  $n$  elementos que denotamos por  $Z = \{x_i\}_i$  donde cada elemento  $x_i = x_0$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  entonces tenemos que, siendo  $Zc_m$  una contaminación de la muestra en  $m$  observaciones:

Si  $T_p$  es un estimador de posición sobre la muestra, se define el punto de ajuste exacto de  $T_p$  en  $Z$ , denotado por  $\delta^*(T_p, Z)$ , de la forma:

$$\delta^*(T_p, Z) = \min_m \left\{ \frac{m}{n} \text{ tal que } \exists Zc_m \text{ con } T_p(Zc_m) \neq x_0 \right\} \quad (4.3)$$

Si  $T_e$  es un estimador de escala sobre la muestra que tenemos, se define el concepto de punto de ajuste exacto de  $T_e$  en la muestra de la forma:

$$\delta^*(T_e, Z) = \min_m \left\{ \frac{m}{n} \text{ tal que } \exists Zc_m \text{ con } T_e(Zc_m) \neq 0 \right\} \quad (4.4)$$

Hay que destacar que si conocemos la estimación esperada ( $x_0$  y 0, valores esperados dado que en la muestra todos los elementos son considerados iguales) para el estimador  $T$  utilizado ( $T_p, T_e$ ) sobre la muestra de  $n$  observaciones ( $Z$ ) que tenemos, entonces  $\delta^*(T, Z)$  va a ser la proporción de observaciones que necesitamos contaminar en  $Z$  para que  $T$  nos proporcione un valor diferente del esperado. Por lo tanto, el punto de ajuste exacto mide el porcentaje máximo de contaminación que permite el estimador, antes de dar como respuesta un valor distinto del esperado.

Como ejemplos, para la media el punto de ajuste exacto va a tomar un valor de  $1/n$ , el mínimo posible, es decir, suponiendo todas las observaciones iguales y considerando una contaminación en una única observación, el estimador es diferente del esperado. Sin embargo, para la mediana el punto de ajuste exacto toma

un valor de  $\text{Int}((n+1)/2)$ <sup>37</sup>. Por otro lado, para la varianza el punto de ajuste exacto va a tomar un valor de  $1/n$ .

### Función de Influencia y Curva de Sensibilidad

En Hampel y otros (1986)<sup>38</sup> se propone el concepto de función de influencia, que pretende medir el efecto producido por una contaminación infinitesimal en el modelo. Esta función se puede definir de la siguiente forma:

Siendo  $X$  la variable del modelo en estudio, con una función de distribución  $F(x)$ , con una muestra de tamaño  $n$  que vamos a denotar con  $Z$  y un estimador del parámetro del modelo  $T$ , denotando por  $T(F)=T(Z)$  al estimador obtenido de la muestra  $Z$  generada en base a la función de distribución  $F(x)$ . Podemos definir la Función de Influencia del estimador  $T$  para  $F(x)$  en la contaminación  $x'$  denotada por  $IF(x'; T, F)$ , de la siguiente forma:

$$IF(x'; T, F) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{T((1 - \epsilon) F + \epsilon \Delta_{x'}) - T(F)}{\epsilon} \quad (4.5)$$

donde  $\Delta_{x'}$  es una medida de probabilidad con peso uno en  $x'$ . Esta función se asemeja a la definición de derivada para la función  $T$ , de manera que, si la Función de Influencia es no acotada, se podría afirmar que una contaminación infinitesimal produce variaciones no controladas en el estimador, por lo que, la estimación sería poco fiable.

Tukey (1970) relaja el concepto de función de influencia y define una nueva función para medir la variación en la respuesta del estimador por el efecto de una contaminación puntual en la muestra. Esta nueva función se denomina curva de sensibilidad, denotada como  $SC_n(x'; T, Z)$ , se define de la siguiente forma:

---

<sup>37</sup> Con  $\text{Int}((n+1)/2)$  estamos haciendo referencia a la parte entera de la mitad del número de observaciones más uno.

<sup>38</sup> En este manual se hace referencia a la tesis doctoral presentada por Hampel en 1968.

$$SC_n(x'; T, Z) = (n + 1) [T(Z \cup x') - T(Z)] \quad (4.6)$$

Igual que en el caso anterior, que esta curva esté acotada significa que la contaminación puntual no es capaz de producir un efecto impredecible en la respuesta del estimador. Así, aparece el concepto de estimador B-robusto asociado a aquellos estimadores donde estas funciones son acotadas, es decir, al producirse una contaminación la respuesta del estimador es previsible.

Como ejemplos, la función de influencia para la media es de la forma  $IF(x; \bar{x}, F) = x - \bar{x}$ , y la curva de sensibilidad  $SC_n(x; \bar{x}, Z) = x - \bar{x}$ . Ambas funciones de  $x$  son no acotadas, por lo que este estimador no es B-Robusto. Para la varianza también se cumple que sus funciones son no acotadas. En definitiva, los estimadores son poco apropiados en presencia de observaciones atípicas, ya que ciertos outliers pueden producir variaciones en las estimaciones que son impredecibles.

### Punto de Ruptura

La forma más utilizada de este concepto, cuando se estudian estimadores robustos, hace referencia a la fracción de contaminación en una muestra que hace que la respuesta del estimador produzca un valor arbitrario, no controlado. Para comprobar que efectivamente la respuesta del estimador es no controlada se utiliza un concepto parecido al sesgo, pero en muestras con observaciones atípicas, denominado *bias*<sup>39</sup>. Este *bias* mide la máxima desviación causada en el estimador por la contaminación de la muestra.

Podemos definir el punto de ruptura de un estimador  $T$  en una muestra  $Z$  de tamaño  $n$ , denotado por  $\epsilon_n^*(T, Z)$  mediante:

$$\epsilon_n^*(T, Z) = \min_m \left\{ \frac{m}{n} / \text{Bias}(m; T, Z) \text{ es infinito} \right\} \quad (4.7)$$

---

<sup>39</sup> Aunque *bias* se traduce como sesgo del inglés, vamos a denotar por *bias* a este sesgo a diferencia del sesgo propio de cualquier estimador.

donde bias del estimador  $T$  en  $Z$  para una contaminación de  $m$  observaciones  $bias(m; T, Z)$  se determina de la forma:

$$bias(m; T, Z) = \sup_{Zc_m} \{ |T(Zc_m) - T(Z)| \} \quad (4.8)$$

donde  $|\cdot|$  representa la norma euclídea usual y  $\sup_{Zc_m}$  representa el valor supremo para esa norma sobre todas las observaciones contaminadas.

Para estudiar el comportamiento asintótico de un estimador ante esta propiedad, se utiliza el concepto de punto de ruptura asintótico, definido por:

$$\epsilon^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n^*(T, Z)$$

En el caso de la media, varianza y estimadores obtenidos por mínimos cuadrados, el punto de ruptura es cero, siendo el de la mediana de  $\text{Int}((n+1)/2)/n$ , de manera que el punto de ruptura asintótico de este estimador es  $1/2$ , el máximo posible.

### **Efecto Enmascaramiento.**

Dentro de las características conocidas como efecto enmascaramiento podemos diferenciar lo que se conoce como efecto “Masking” y efecto “Swamping”. Se conoce como efecto Masking al hecho de que una observación pueda ser enmascarada por la presencia de un conjunto de elementos de la muestra, de manera que, aunque esta observación fuera atípica no sería detectada como tal. El efecto Swamping se produce cuando una observación que presente un buen comportamiento es detectada como observación atípica, debido probablemente a algún conjunto de observaciones de la muestra. Estos efectos son estudiados mediante ciertos test siendo en general relacionados con la propiedad de ajuste exacto y los conceptos de curva de sensibilidad y punto de ruptura.



Estas dos características van a presentar una clara contrapartida con los conceptos usados en control estadístico de la calidad, ya que la probabilidad de aparecer el efecto Swamping va a estar relacionado con la probabilidad de obtener una falsa alarma en un gráfico de control, mientras que, la probabilidad de que aparezca el efecto Masking va a estar relacionado con el ratio de elementos defectuosos detectado.

Como se puede observar, tras analizar las distintas propiedades deseables en los estimadores robustos, la media y varianza que son los estimadores de posición y escala usados en control estadístico de la calidad, no presentan un comportamiento adecuado ante la presencia de observaciones atípicas, por lo que se hace necesario definir y utilizar estimadores que presenten un comportamiento robusto ante la presencia de este tipo de observaciones.

### **4.3. ESTIMADORES ROBUSTOS**

Existen numerosas propuestas de estimadores con un buen comportamiento ante la presencia de observaciones atípicas. Estos estimadores han supuesto una mejora considerable en el comportamiento ante las características de robustez, si bien, no se puede decir que exista un estimador robusto que sea el mejor en todas las circunstancias. En este trabajo vamos a analizar, por su mayor difusión y uso, desde un punto de vista práctico los estimadores conocidos como: MCD (minimum covariance determinant); MVE (minimum volume elipsoidal); y las familias de estimadores conocidas por los nombres de M-Estimadores, R-Estimadores y L-Estimadores. Dentro de los L-Estimadores haremos especial hincapié en la subfamilia denominada “Trimmed Means” (medias truncadas), ya que ésta recoge claramente el objetivo que se persigue de una forma sencilla. Además, esta familia de estimadores, va a ser la que vamos a utilizar en este trabajo para llevar a cabo el control estadístico de la calidad.

#### **4.3.1. ESTIMADORES MCD (MINIMUM COVARIANCE DETERMINANT)**

Dada una muestra de tamaño  $n$ , y pedida una estimación de un parámetro cualquiera, este método de estimación consiste en la determinación de una muestra de  $h < n$  observaciones del conjunto de información, seleccionada de forma que minimice el determinante de la matriz de covarianzas, y utilizar esta muestra para obtener las estimaciones correspondientes. En el procedimiento de selección se prueba con las distintas combinaciones posibles en base a las observaciones disponibles, y se elige aquella combinación con menor determinante de la matriz de covarianzas. Una vez seleccionada esta muestra se pasa a determinar el estimador correspondiente, en base a las  $h$  observaciones seleccionadas.

El procedimiento para llevar a cabo esta estimación ha sido recogido en distintos algoritmos que permiten obtener un valor aproximado de este estimador MCD, ya que el desarrollo del procedimiento anteriormente expuesto puede resultar tedioso si el número de observaciones es elevado. Así, por ejemplo, para  $n=20$  esta búsqueda va a requerir la determinación de unos 185 determinantes y con  $n=100$  supone calcular  $10^{29}$  determinantes.

Estos estimadores MCD van a ser resistentes a outliers dado que estos outliers no son utilizados en la determinación de la estimación correspondiente. Desde la muestra, denominada como muestra MCD, podemos determinar la media y matriz de covarianzas que son estimadores robustos de posición y escala de la población formada por las  $n$  observaciones que usaremos para establecer el gráfico de control. Para determinar este estimador MCD tenemos distintos algoritmos<sup>40</sup>, entre estos algoritmos de aproximación puede destacar el propuesto por Hawkins (1994, 1999) y Rosseeuw y Van Driessen (1999) que vamos a analizar:

El primero, propuesto por Hawkins (1994), está basado en un intercambio de puntos situados dentro y fuera de una muestra de tamaño  $h$  fijada de antemano. El algoritmo consiste en:

- Empezamos con una submuestra de tamaño  $h$  cualquiera, que denotamos por  $H_1$ .
- Intercambiamos puntos  $x_i \in H_1$  y  $x_j \notin H_1$  y llamamos a la nueva submuestra  $H_2$  siempre que:

$$d_i = \det(\text{cov}(H_1)) - \det(\text{cov}(H_2)) > 0$$

esta diferencia,  $d_i$ , es maximizada sobre todos los intercambios posibles de pares de puntos  $x_i \in H_1$  y  $x_j \notin H_1$ .

---

<sup>40</sup> Hay que tener en cuenta que estos algoritmos son aproximaciones del exacto, además estos algoritmos no son únicos ya que existen numerosos en la bibliografía especializada. Nos hemos decantado por los dos expuestos en este trabajo por su gran sencillez y su mayor aplicación desde un punto de vista práctico.

- $H_2$  va a ser la nueva submuestra de tamaño  $h$ .
- El proceso se repite hasta que ningún intercambio suponga una reducción en el determinante  $\det(\text{cov}(H_i))$  (o lo que es equivalente, hasta que ningún intercambio suponga que  $d_i > 0$ ).

Otro algoritmo más rápido para encontrar el estimador MCD fue desarrollado de forma independiente por Hawkins (1999) y Rosseeuw y Van Driessen (1999). La clave de este algoritmo está basado en lo que Rousseeuw llama el *paso C*. En lugar de intercambiar un par de puntos situados dentro y fuera de la muestra inicialmente establecida, el paso C permite que se produzca un intercambio de muchas observaciones al mismo tiempo en cada paso. De nuevo, empezamos con una serie de observaciones de la información inicial de tamaño  $h$ ,  $H_1$ . De esta serie de observaciones determinamos el valor de  $\bar{X}_{H_1}$ ,  $S_{H_1}$  y la distancia de Mahalanobis para cada uno de los puntos correspondientes a las  $n$  observaciones que teníamos inicialmente ( $d_{S_{H_1}}^2(x_i, \bar{X}_{H_1}) = d_{H_1}^2(i)$ ). Entonces, clasificamos las distancias basadas en permutaciones  $\mathbf{B}$  tal que:

$$d_{H_1}^2(\pi(1)) \leq d_{H_1}^2(\pi(2)) \leq \dots \leq d_{H_1}^2(\pi(n))$$

Posteriormente, asignamos  $\{\mathbf{B}(1), \mathbf{B}(2), \dots, \mathbf{B}(h)\}$  a  $H_2$ . De esta forma, usando  $H_2$  volvemos a calcular la media, desviación típica y distancia de Mahalanobis y repetimos el proceso hasta que la permutación  $\mathbf{B}$  no cambie. Rosseeuw y VanDriessen (1999) demuestra que el proceso converge.

La cuestión subyacente en ambos procedimientos puede ser la forma de seleccionar la submuestra inicial  $H_1$ . Hawkins (1999), inicialmente, propuso la selección de una serie aleatoria de tamaño  $h$ . El problema de esta forma de selección de la muestra inicial aparece en poblaciones con gran contaminación, debido a que la muestra no va a mostrar el verdadero comportamiento de la población, al estar afectada por dicha contaminación. Esto va a suponer que va a ser largo, para el algoritmo de intercambio, converger al comportamiento de la

población. Para muestras contaminadas, Rousseeuw (1999) propone empezar con una serie aleatoria de  $p+1$  observaciones (número mínimo de puntos necesarios para definir una matriz de covarianzas no singular) y agregar puntos hasta que la subserie de  $h$  puntos sea construida. Estos puntos se van a agregar en base a la distancia a la media del conjunto inicial de  $h$  observaciones.

En control estadístico de la calidad, el proceso propuesto inicialmente por Hawkins será válido, ya que en este caso suponemos que en el período base el proceso va a estar situado bajo control, o muy poco afectado por observaciones atípicas, de ahí que, una selección aleatoria de la muestra de inicio, debe presentar un comportamiento correcto para representar el verdadero comportamiento del proceso.

De los algoritmos analizados, aunque es un poco complejo en su determinación, el más usado suele ser el propuesto por Rosseeuw y VanDriessen (1999), ya que aparece recogido en programas informáticos de gran aplicación como S-Plus, SAS y R (bajo el nombre de cov.mcd).

Si nos decantamos por el procedimiento propuesto por Hawkins (1999) y Rosseeuw y VanDriessen (1999), el algoritmo usado para estimar el MCD empieza con una serie de inicios aleatorios, cada uno de tamaño  $h$  de las observaciones disponibles inicialmente. Usando el algoritmo denominado como el paso C para cada inicio aleatorio, el procedimiento determina la muestra MCD de la siguiente forma:

1. Determinamos la media y covarianza de la muestra inicial de  $h$  observaciones.
2. Calculamos la distancia de Mahalanobis, basada en la media y covarianza de la muestra usada anteriormente, para cada una de las observaciones disponibles.
3. Seleccionamos una muestra de los puntos con una menor distancia de Mahalanobis en el paso 2.

4. Repetimos los pasos desde 1 a 3 hasta que la muestra de tamaño  $h$  no sufra grandes cambios.

La muestra MCD va a ser la obtenida en el paso 3, con el mínimo determinante de la matriz de covarianzas para todos los inicios aleatorios. Un estimador robusto obtenido a partir de esta muestra es más adecuado para la detección de outliers, ya que los puntos alejados no afectan a los estimadores de posición y escala MCD obtenidos.

Este estimador es equivariante afín, ya que el determinante de la matriz de covarianza de las observaciones transformadas es igual a:

$$\det(A'CA) = (\det(A))^2 \det C$$

donde  $A$  es una matriz no singular ( $A \in \text{Mat}_p(\mathbb{R})$ ),  $(\det(A))^2$  es una constante y el valor relativo del determinante de la matriz de covarianzas no va a cambiar.

El punto de ruptura de este estimador va a venir dado por:

$$\epsilon_n^*(T, X) = (\text{Int}(n/2) - p + 1) / n$$

valor que, como posteriormente comprobaremos, coincide con el punto de ruptura para el estimador MVE.

### 4.3.2. ESTIMADORES MVE (MINIMUM VOLUME ELLIPSOIDAL)

Este método de estimación consiste en determinar el estimador de posición como el centro de un elipsoide de volumen mínimo que contenga al menos  $h$  puntos de las observaciones que tenemos. El valor de  $h$  es considerado en Rousseeuw (1984) igual a  $\text{Int}(n/2)+1$ . El estimador de covarianza que vamos a utilizar en este caso se determina como el elipsoide multiplicado por un factor que haga el estimador consistente en distribuciones normales multivariantes. El estimador obtenido de esta forma fue propuesto por Rousseeuw (1984, 1985) y es denominado “minimum volume ellipsoidal” (MVE). Este estimador va a ser equivariante afín. La equivarianza afín de este estimador se garantiza como consecuencia de que la imagen de un elipsoide mediante una transformación afín no singular,  $Ax+b$ , es todavía un elipsoide con volumen igual a  $|\det(A)|$  veces el volumen del elipsoide original. Como  $|\det(A)|$  es una constante, el tamaño relativo del elipsoide no cambia bajo transformaciones afines.

El punto de ruptura de este estimador propuesto por Rousseeuw (1984, 1985) es<sup>41</sup>:

$$\varepsilon_n^*(T, X) = ([n/2] - p + 1) / n$$

de manera que el punto de ruptura asintótico es  $1/2$ . Este punto de ruptura ha sido mejorado mediante algunas modificaciones en el estimador como puede ser la propuesta por Rousseeuw (1991) que consigue un punto de ruptura que va a estar situado en  $\text{Int}((n-p+1)/2)/n$ .

Para obtener este procedimiento se debería partir de todas las combinaciones posibles de  $h$  observaciones, y determinar el volumen del menor elipsoide que engloba todas las observaciones seleccionadas. Esta forma de determinación del estimador MVE hace que sea largo en muchas aplicaciones prácticas determinarlo, ya que hay que considerar todas las combinaciones posibles establecidas con la

---

<sup>41</sup> La obtención de este punto de ruptura puede consultarse en Rousseeuw y Leroy (1987), pág. 259.

mitad de las observaciones y calcular el volumen del menor elipsoide alrededor de los datos, sobretodo en muestras de gran tamaño, por lo que se debe aproximar.

Existen numerosos algoritmos desarrollados para esta aproximación; si bien, destaca el clásico algoritmo de remuestreo propuesto por Rousseeuw y Leroy (1987) denominado MINVOL<sup>42</sup>. Otro algoritmo de aproximación del estimador MVE, que destaca entre las propuestas desarrolladas, es el de Woodruff y Rocke (1993), que combina principios de remuestreo con técnicas de búsqueda heurística. El algoritmo MINVOL consiste en:

a) Primero se selecciona una muestra de  $p+1$  observaciones distintas, cuyos índices serán denotados por  $J=\{i_1, \dots, i_{p+1}\}$ . De esta muestra se determina la media aritmética y la matriz de covarianzas dada por:

$$\bar{x}_J = \frac{1}{p+1} \sum_{i \in J} x_i \quad S_J = \frac{1}{p} \sum_{i \in J} (x_i - \bar{x}_J)(x_i - \bar{x}_J)^t$$

b) Una vez determinada la muestra inicial hay que encontrar un factor que mida la necesidad de inflado o desinflado del elipsoide con centro en  $\bar{x}_J$  y dispersión  $S_J$  para recoger exactamente los  $h$  puntos. Este factor se determina como:

$$m_J^2 = \underset{i=1, \dots, n}{\text{med}} (x_i - \bar{x}_J)^t S_J^{-1} (x_i - \bar{x}_J)$$

c) El volumen del elipsoide resultante ( $m_J^2 S_J$ ) es proporcional a:

$$\det((m_J^2 S_J))^{1/2} = (\det(S_J))^{1/2} (m_J)^p$$

---

<sup>42</sup> Vamos a prestar especial atención al desarrollo de este algoritmo ya que es el más utilizado en la práctica debido a su mejor comportamiento ante muestras de gran tamaño y a su implementación en algunos paquetes informáticos.



Estos cálculos hay que repetirlos para muchos índices  $J$  y después elegir aquel que presenta menor valor para la ecuación anterior. Posteriormente, determinamos los estimadores de posición ( $T_p$ ) y escala ( $T_e$ ) mediante:

$$T_p = \bar{x}_J \quad y \quad T_e = (\chi_{p,0,5}^2)^{-1} m_J^2 S_J$$

donde  $\chi_{p,0,5}^2$  es la mediana de la distribución chi-cuadrado con  $p$  grados de libertad y se usa como factor corrector para conseguir la consistencia del estimador obtenido en distribuciones normales multivariantes. El número de submuestras aleatorias necesarias para determinar este estimador depende del valor que fijemos para la probabilidad de que al menos una de las  $m$  submuestras no contenga outliers. Esta probabilidad se determina como:

$$1 - (1 - (1 - \epsilon)^{p+1})^r$$

donde  $\epsilon$  es la fracción máxima de outliers permitida en los datos originales, de manera que fijando el valor de esta probabilidad podemos determinar el número de repeticiones ( $r$ ) necesarias para establecer los estimadores MVE mediante esta aproximación.

Se han desarrollado algunos algoritmos para determinar el estimador de forma exacta como son las propuestas de: Cook, Hawkins y Weisberg (1992), que llevan a cabo una ingeniosa pero exhaustiva búsqueda de todos los posibles conjuntos de observaciones de tamaño  $h$ ; y Argulló (1996) que desarrolla un algoritmo exacto basado en un procedimiento ramificado y limitado, que selecciona el conjunto óptimo sin requerir la inspección de todos los conjuntos de tamaño  $h$ . El problema que presentan estos algoritmos exactos es que son muy lentos en su aplicación con mucha información. Así, el procedimiento de Cook, Hawkins y Weisberg (1992) se podría aplicar cuando tenemos menos de 30 observaciones, y el de Argulló (1996) cuando el número de observaciones sea inferior ó igual a 100 y el número de variables inferior o igual a 5. Esto supone que, en la mayoría de los casos, se use

la aproximación desarrollada por Rousseeuw y Leroy (1987), que está recogida en algunos programas informáticos como S-Plus y R con el nombre de cov.mve.

La diferencia fundamental entre el estimador obtenido por MVE y MCD se debe a que en el caso de los estimadores MCD se determina primero la muestra de  $h$  observaciones que hace mínima la matriz de covarianzas y una vez determinada ésta, se pasa a obtener las estimaciones correspondientes; por contra, en el estimador MVE, dado que se intenta minimizar el volumen elipsoidal es necesario determinar en cada caso tanto un estimador de posición como uno de escala al mismo tiempo. En la mayoría de los casos se considera los estimadores obtenidos por MCD más exactos que los obtenidos por MVE.

### 4.3.3. M-Estimadores, L-Estimadores, R-Estimadores y S-Estimadores

La familia de estimadores denominada *M-Estimadores* fue propuesta inicialmente por Huber (1964) como una generalización de los estimadores de mínimos cuadrados (LS-Estimadores). En este caso se utiliza una función de los errores de estimación (que se denota por  $\rho$  función), distinta del cuadrado usado en el caso de mínimos cuadrados. Así, en una muestra de tamaño  $n$ , donde  $\{e_i\}_i$  son los errores de estimación para el estimador T se define:

$$M-Est. \equiv \min_T \sum_{i=1}^n \rho(e_i) \quad (4.9)$$

donde  $\rho$  es una función perteneciente a un conjunto de funciones, que denotaremos por Rho-Func.

Además de estas funciones, tenemos un conjunto de funciones denominadas  $\psi$  Psi-Func, que son la derivada de las Rho-Func y, por lo tanto,  $\mathbf{R} = \mathbf{D}\rho$ . De ahí

que el M-Estimador asociado a  $\mathbf{R}$  se puede definir de forma equivalente a la que aparece en la ecuación 4.9 de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^n \psi(e_i) = 0 \quad (4.10)$$

Existen una gran variedad de M-Estimadores dependiendo de las funciones Rho o Psi utilizadas. Entre estas funciones que dan lugar a distintos M-Estimadores podemos destacar las propuestas de:

1. Huber (1964) propone un estimador denominado HU-Estimador cuya Psi-Función viene dada por:

$$\psi_{HU}(e_i; a) = \text{Min} \{ a, \text{Max} \{ e_i, -a \} \}$$

donde  $a$  es una constante.

2. Huber (1964) también propone una Psi-Func definida de la siguiente forma:

$$\psi_{HU}(e_i; c) = \begin{cases} e_i & \text{si } |e_i| < c \\ 0 & \text{si } |e_i| \geq c \end{cases}$$

donde  $c$  es una constante, y se cumple que  $\mathbf{R}$  pertenece a las conocidas Psi-Fun.

3. Hampel (1974) propuso la elaboración de otro M-Estimador que denotaremos como HA-Est., en este caso la Psi-Fun es la siguiente:

$$\psi_{HA}(e_i; a, b, c) = \begin{cases} e_i & \text{si } 0 \leq |e_i| < a \\ a \text{Sign}(e_i) & \text{si } a \leq |e_i| \leq b \\ a \frac{c - |e_i|}{c - b} \text{Sign}(e_i) & \text{si } b \leq |e_i| \leq c \\ 0 & \text{si } |e_i| \geq c \end{cases}$$

donde  $\text{Sign}(e_i)$  es el signo de  $e_i$  y la función se define para todo  $x$  o y valores  $a, b, c$  o , con  $a \# b \# c$ .

Estos M-Estimadores suponen un mayor control sobre el efecto de los valores extremos en los residuos, de manera que el ajuste se realiza sobre los valores pequeños (centrales) de éstos. Esto supone una mejora del comportamiento de estos estimadores en términos de mejorar las características en robustez, si bien, este comportamiento depende de la forma en la que se definan las Rho-Funciones. Este comportamiento que parece contraproducente en la estadística clásica al obviar los errores grandes, es un comportamiento adecuado en control estadístico de la calidad, al prescindir de todas las observaciones atípicas (fuera de control) en la fase I dándoles el mismo peso con indiferencia del error que estamos cometiendo (distancia a la situación bajo control) y centrarse en errores pequeños.

Una generalización de estos M-Estimadores puede encontrarse en Mallow (1975) con el nombre de GM-Estimadores. Estos estimadores utilizan, además de una función dependiente de los errores de estimación, una función de ponderaciones sobre los errores. De forma general, considerando la función de ponderaciones  $w$ , el GM-Estimador va a tener la siguiente forma:

$$GM-Est. \equiv \min_T \sum_{i=1}^n w(e_i) \rho(e_i) \quad (4.11)$$

en general, estos estimadores que incluyen una función de ponderaciones mejoran el comportamiento respecto a los M-Estimadores.

Además de estos estimadores, otros estimadores con buenas propiedades en robustez son los llamados *R-Estimadores*. Para determinar estos estimadores se recurre a minimizar una expresión en la que interviene una función de rango de los errores de estimación, que se denota habitualmente por  $\text{Rang}(\cdot)$ . Como ejemplo, uno de los R-Estimadores más conocidos es el propuesto por Adichie (1967), que denotaremos por A-Est., que se puede definir de la siguiente forma:

$$A-Est. \equiv \text{Min}_T \sum_{i=1}^n w(\text{Rang}(e_i)) e_i \quad (4.12)$$

donde  $\sum_{i=1}^n w(\text{Rang}(e_i)) = 0$  y  $w$  es una función de ponderaciones monótona.

Otra gran familia de estimadores robustos son los denominados *L-Estimadores* que utilizan en su definición una función lineal en la que interviene una función de rangos de los errores de estimación. Dentro de este conjunto de estimadores podemos destacar por su mayor aplicación, gracias a su implementación en un paquete informático denominado PROGRESS<sup>43</sup>, los denominados “Least Median Squares” (Mínima Mediana al Cuadrado), “Least Quantility Squares” (Mínimos Cuantiles al cuadrado) y “Least Trimmed Squares” (Mínimos Truncados al cuadrado) definidos por Rousseeuw y Leroy (1987).

El primero de ellos denominado “Least Median Squares” (Mínima mediana al cuadrado) es denotado habitualmente por LMS-Est.. Este estimador está basado en la idea de sustituir en mínimos cuadrados el operador media por uno más robusto como es la mediana, así este estimador se define de la siguiente forma:

$$LMS-Est \equiv \text{Min}_T \{ \text{Med}_i (\{ e_i^2 \}) \} \quad (4.13)$$

Este estimador es un caso particular del estimador denominado “Least Quantility Squares”(Mínimos Cuantiles al cuadrado) denotado por LQS-Est. que se define de la siguiente forma:

$$LQS-Est \equiv \text{Min}_T \{ (e^2)_{[s]} \} \quad (4.14)$$

donde  $s$  habitualmente se toma como  $(\text{Int}((1-\alpha)n) + \text{Int}(\alpha(p+1)))$  y con  $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ . Así, este estimador minimiza los errores al cuadrado situados en la posición  $s$ , de tal forma que si  $\alpha = \frac{1}{2}$  este estimador es asintóticamente equivalente a LMS-Est.

---

<sup>43</sup> Ver Rousseeuw y Leroy (1987).

El último estimador propuesto por Rousseeuw es el denominado “Least Trimmed Squares” (Mínimos Truncados al cuadrado) denotados por LTS-Est. que minimiza la suma de los errores de estimación al cuadrado, pero no todos los errores sino sólo de los  $h$  más pequeños. Así, su definición, para  $h \leq n$ , es:

$$LTS-Est \equiv \text{Min}_T \left\{ \sum_{i=1}^h (e^2)_{[i]} \right\} \quad (4.15)$$

donde  $(e^2)_{[i]}$  son los cuadrados de los residuos ordenados de menor a mayor (teniendo en cuenta que los residuos se elevan primero al cuadrado y después se ordenan). Además, si  $h=n$ , entonces, este estimador coincide con el estimador obtenido por mínimos cuadrados.

Se puede comprobar que estos estimadores (LMS-Est., LQS-Est. y LTS-Est.) cumplen la propiedad de ajuste exacto en su máximo nivel, son equivariantes afín y con un punto de ruptura asintótico del LMS-Est. y LTS-Est situado en el valor máximo de  $1/2$ .

Los L-Estimadores contienen una subfamilia conocida por el nombre de “*Trimmed Means*”, que traduciremos por Medias Truncadas. Esta familia constituye el elemento fundamental que vamos a utilizar en este trabajo para obtener unos estimadores de posición y escala robustos con los que llevar a cabo el proceso de control estadístico de la calidad. Sin dejar de lado ninguna de las demás propuestas, nos hemos decantado por esta familia de estimadores dada la sencillez en su determinación y el buen comportamiento que presentan en la resolución de la problemática que nos ocupa.

#### 4.3.4. MEDIAS TRUNCADAS (TRIMMED MEANS)

Los elementos de la familia de medias truncadas utilizan para su definición un número real que denotaremos por  $\alpha$ . Este valor  $\alpha$ , que llamaremos nivel de truncamiento, va a tomar valores situados en el intervalo  $[0,50]$ . Así, la media truncada a nivel de truncamiento  $\alpha$ , que denotaremos por  $\alpha\_Truncada$ , se construye como la media de las observaciones de la muestra eliminando el  $\alpha\%$  de las observaciones mayores y el  $\alpha\%$  de las menores. Es decir, dada una muestra  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  y un valor  $\alpha \in [0,50]$ , se define el elemento  $\alpha\_Truncada$  sobre  $x$ , denotándolo por  $\alpha\_Trun(x)$ , de la forma:

$$\alpha\_Trun(x) = \frac{1}{n - 2a} \sum_{i=a+1}^{n-a} x_{[i]} \quad (4.16)$$

donde  $a = \text{Int}(\alpha n / 100)$  y denotamos por  $x_{[i]}$  a la observación en la posición  $i$ -ésima de una ordenación de menor a mayor de los elementos de  $x$ .

Hay que señalar que el estimador  $\alpha\_Trun(x)$  es la media de las observaciones de la muestra  $x$  al eliminar  $2a$  observaciones de ella, que son, las  $a$  menores y las  $a$  mayores. De esta manera  $0\_Truncada$  coincide con la media muestral, y si  $\alpha$  tiende a 50, entonces el concepto tiende a la mediana muestral. Tomando por convenio que  $50\_Truncada$  es la mediana, podemos definir las  $\alpha\_Truncadas$  para todo  $\alpha$  en el intervalo cerrado  $[0,50]$ .

De las propiedades más importantes de estos estimadores, podemos destacar que: para cualquier  $\alpha$ ,  $\alpha\_Truncada$  es un estimador insesgado del parámetro de posición de una variable con distribución simétrica, siendo, en muestras de variables normales  $X/N(\mu, \sigma^2)$ , consistentes en media cuadrática de  $\mu$ . No hace falta recordar que una de las suposiciones básicas en control estadístico de la calidad es la de normalidad.

Respecto del comportamiento de los elementos de esta familia en presencia de observaciones atípicas<sup>44</sup>, hay que resaltar que: estos estimadores son equivariantes afín; tienen punto de ruptura dependiente del nivel de truncamiento considerado  $(a+1)/n$ ; con punto de ruptura asintótico de  $a/100$ ; y son B-Robustos siempre que  $a \neq 1$ , es decir, tienen función de influencia acotada. Por otra parte, de la controversia entre robustez y eficiencia (considerando eficiencia relativa con respecto a la media), debemos hacer notar que la eficiencia de estos estimadores en normalidad puede ser aproximada mediante la forma lineal  $(100-0.723a)\%$  para  $a \in [0,50]$ , por lo que los elementos de esta familia recorren los diferentes rangos de estas propiedades entre el 64% (de la mediana) y el máximo (el 100% de la media).

En la determinación de la media truncada, el nivel de truncamiento juega un papel decisivo, en tanto en cuanto es el que determina la robustez y eficiencia del estimador que genera. En Dodge y Jurecková (2000) y Ortega (2002) se realiza un estudio en este sentido, proponiéndose ciertos procedimientos mediante los cuales, y bajo ciertos supuestos, es posible determinar un nivel de truncamiento óptimo para las  $m$ -Truncadas. En este trabajo vamos a utilizar el procedimiento de elección del nivel de truncamiento propuesto por Ortega (2002), que consiste en seleccionar el menor nivel de truncamiento donde las diferencias entre las  $m$ -Truncadas para valores mayores a éste sean pequeñas, entendiendo por pequeñas que sean menores que una cota de estabilidad preestablecida. Esta cota de estabilidad en normalidad al 95% aparece tabulada en el citado trabajo.

Además de utilizar un estimador robusto de posición encuadrado dentro de la familia de medias truncadas, también vamos a utilizar un estimador de correlación entre las variables. Este estimador se va a definir de forma análoga a la covarianza que para dos variables  $X$  e  $Y$  se define como la media del producto de las desviaciones de las observaciones de las variables a la media. Dado que la media va a presentar malas propiedades en robustez, vamos a sustituir éstas por medias

---

<sup>44</sup> Hoaglin y otros (2000) o Rousseeuw y Leroy (1987).



truncadas. Este nuevo estimador de correlación, denotado por  $S_{xy}^R$  y englobado en la familia de medias truncadas, se define como:

$$S_{xy}^R = C(\beta_{xy}) \beta_{xy} - \text{Trun}(\{(X_i - \bar{X}^R)(Y_i - \bar{Y}^R)\}_i) \quad (4.17)$$

donde  $C(\beta_{xy})$  es un coeficiente de consistencia cuyo valor depende del nivel de truncamiento  $\beta$ ,  $\bar{X}^R$  e  $\bar{Y}^R$  son las medias truncadas de la variable  $X$  e  $Y$  respectivamente.

Un caso concreto de este estimador se da cuando  $X=Y$ , en este caso estamos analizando la varianza existente en la variable. Este estimador de escala, que va a ser usado en control robusto de la calidad, se denomina " $\beta$ \_Truncada sobre  $x$  e  $y$  se define como:

$$\alpha\beta\_Trun(x) = C(\alpha, \beta) \beta\_Trun[\{(x_i - \alpha\_Trun(x))^2\}_i] \quad (4.18)$$

donde " $\alpha$ " denota el nivel de truncamiento utilizado para calcular el estimador de posición,  $\beta$  denota el nivel de truncamiento usado para determinar la media de las distancias de las observaciones al estimador de posición, y  $C(\alpha, \beta)$  es un coeficiente de consistencia cuyo valor depende del nivel de truncamiento  $\beta$ . Este coeficiente de consistencia es idéntico al utilizado en 4.17, si bien, el coeficiente " $\alpha$ " en 4.17 puede ser distinto para cada una de las variables que intervienen ( $X$  e  $Y$ ).

Los niveles de truncamiento " $\alpha$ " y  $\beta$  van a tomar valores comprendidos en el intervalo  $[0, 50]$  y van a ser seleccionados siguiendo a Ortega (2002), mientras que los valores del coeficiente de consistencia para distintos niveles de truncamiento aparece recogido en la siguiente tabla<sup>45</sup>:

---

<sup>45</sup> En la práctica se suelen emplear los valores de los coeficientes de consistencia  $C(\beta_{xy})$  y  $C(\alpha, \beta)$  iguales.

Tabla 4.1: Valores del coeficiente de consistencia para $s_{xy}^R$ y $\alpha\beta\_Trun(x)$ .					
$\alpha$	C( $\alpha, \beta$ )	$\beta$	C( $\alpha, \beta$ )	$\alpha$	C( $\alpha, \beta$ )
0	1	5	1,2486	30	1,9789
1	1,0704	10	1,4281	35	2,0718
2	1,1215	15	1,58848	40	2,1409
3	1,1668	20	1,73442	45	2,1837
4	1,2088	25	1,86535	50	2,1981

Fuente: Ortega (2002)

Los extremos de esta familia van a estar determinados por la varianza de  $x$  en el caso de que  $\alpha=\beta=0$ ; y lo que se denomina en Ortega (2003) MDM (mediana de desviaciones a la mediana) cuando  $\alpha=\beta=50$ . La raíz cuadrada de estos estimadores  $\alpha\beta\_Trun(x)$  ( $\sqrt{\alpha\beta\_Trun(x)}$ ) pueden ser considerados como estimadores de escala.

Las propiedades en robustez de estos estimadores de escala han sido analizadas en Ortega (2003) y entre éstas cabe destacar que: para una muestra de tamaño  $n$ , siendo  $a=Int(\alpha n/100)$  y  $b=Int(\beta n/100)$  para valores de  $\alpha$  y  $\beta$  en  $[0, 50]$ , son estimadores equivariantes afín, igual que los estimadores clásicos de escala; con punto de ajuste exacto de valor  $Min\{(a+1)/n, (b+1)/n\}$ ; con curva de sensibilidad acotada cuando  $Min\{a, b\} \leq 1$ ; y punto de ruptura de valor  $Min\{(a+1)/n, (b+1)/n\}$ , siendo el punto de ruptura asintótico de la forma  $Min\{\alpha/100, \beta/100\}$ .

Por otro lado, la eficiencia de estos estimadores bajo normalidad depende de la elección de los niveles de truncamiento considerados, oscilando esta eficiencia respecto a la varianza corregida entre el 38,35%, para  $\alpha=\beta=50$  (máxima robustez y mínima eficiencia), y el 100% para  $\alpha=\beta=0$  (mínima robustez y máxima eficiencia). Estos estimadores de escala presentan una ventaja fundamental respecto a otros estimadores de escala propuestos en la literatura, consistente en la posibilidad de elegir un nivel de eficiencia y, por lo tanto, un comportamiento en

robustez en función de las necesidades o preferencias, simplemente eligiendo unos niveles de truncamiento determinados. El comportamiento en términos de eficiencia bajo normalidad de estos estimadores para distintas combinaciones en los niveles de truncamiento puede analizarse en Ortega (2003).

#### **4.4. UNA NUEVA MEDIDA DE CONTROL MULTIVARIANTE DE LA CALIDAD: $T^2$ DE HOTELLING ROBUSTA**

Los métodos robustos pueden ser aplicados a las técnicas estadísticas de control de calidad, de forma que obtengamos estimaciones de los parámetros que sean resistentes ante la presencia de observaciones atípicas. Existen muchos casos donde la presencia de estos outliers en la muestra pueden desvirtuar el resultado obtenido, bien por el efecto que pueden suponer al establecer los límites de control en base a estimaciones poco robustas, o ante el comportamiento de los valores representados en el gráfico de control como consecuencia de la influencia de estos outliers<sup>46</sup>.

Para evitar los efectos negativos de incluir estimadores poco robustos han sido desarrollados distintos trabajos que recogen la aplicación de métodos robustos en control estadístico de la calidad univariante y multivariante. Como hemos comentado anteriormente, estos desarrollos se centran en la fase I (período base) del control estadístico de la calidad donde se lleva a cabo la determinación de los parámetros del gráfico de control de la forma más ajustada posible. En este sentido, es importante hacer este matiz ya que al estar situados en la fase I, estos métodos van a permitir obtener estimaciones más ajustadas sin necesidad de llevar a cabo cálculos iterativos. Por contra, si nos centramos en la fase II, con estos métodos lo único que podemos conseguir es ocultar observaciones de las consideradas como observaciones fuera de control.

En control de calidad univariante los principales desarrollos han ido centrados en el gráfico de control propuesto por Shewhart. En este sentido, el trabajo de Langenberg e Iglewicz (1983) propone utilizar la familia de estimadores

---

<sup>46</sup> Este último efecto aparece cuando usamos observaciones agrupadas en subgrupos racionales, de tal forma, que en el gráfico de control aparece un estadístico que resume la información de cada subgrupo.

denominados medias truncadas en la determinación de los límites de control del gráfico. Rocke (1989) desarrolla un trabajo con un enfoque univariante donde se lleva a cabo una comparación de distintas medidas clásicas y robustas, analizando su comportamiento ante muestras contaminadas, igual que aparece recogido en el trabajo de Yi Dou y Ping Sa (2002). Por último y más general, desde una óptica univariante, ya que considera grupos de observaciones para cada una de las variables, podemos citar el trabajo de Niang (2002), que utiliza estimadores robustos de posición de las familias de los *M-Est.* y *W-Est.*

En este trabajo, los estimadores robustos van a ser usados en la obtención de estimaciones robustas de los parámetros necesarios para llevar a cabo el control estadístico de la calidad desde una óptica multivariante. De esta forma, obtenemos un gráfico de control más ajustado al comportamiento del proceso y que no se ve afectado por las observaciones atípicas en su determinación. El ajuste en la fijación de los límites de control va a permitir detectar situaciones fuera de control de una forma más clara en la fase II del proceso de control estadístico de la calidad. Los posibles desarrollos robustos en los gráficos de control univariantes pueden ir centrados en este sentido, es decir, ajustar los límites de control sin considerar el efecto de los outliers y marcar más claramente la presencia de observaciones fuera de control en el período de vigilancia.

En control de calidad multivariante existen distintos desarrollos (Vargas, 2003 y Alfaro y Ortega, 2003) centrados sobretudo en gráficos de control basados en distancias ( $T^2$  de Hotelling) para observaciones individuales. Si aplicamos la familia de estimadores robustos denominada media truncadas en la determinación de este estadístico  $T^2$  tendremos que sustituir los estimadores clásicos por estimadores robustos. Así, dado el estadístico  $T^2$  de Hotelling definido por:

$$T_i^2 = (x_i - \bar{x}) \cdot S^{-1} \cdot (x_i - \bar{x})^t \quad (4.19)$$

Vamos a sustituir en todos los casos medias por " \_Truncadas y las medidas de correlación y escala por sus contrapartidas robustas englobadas en la familia de las medias truncadas. Es decir, se considera un estimador de posición obtenido mediante medias truncadas, y un estimador de escala definido de manera simétrica a la matriz de varianzas-covarianzas, pero donde las medias son sustituidas por medias truncadas. Veamos su construcción paso a paso.

Debemos empezar por construir el vector de posición mediante medias truncadas. Así, para el conjunto de observaciones disponibles  $\{x_{ij}\}_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, p}$  (observaciones para la variable  $X_j$ ) definimos unos niveles de truncamiento  $\alpha_j$  que nos proporcionan las medias truncadas para la variable j-ésima, es decir, definimos de forma análoga a 4.16:

$$\bar{X}_j^R = \alpha_j - \text{Trun}(\{x_{ij}\}_i) \quad (4.20)$$

de manera que el vector de medias truncadas para el conjunto de variables  $\{X_j\}_{j=1, \dots, p}$  es definido de la forma:

$$\bar{X}^R = (\bar{X}_1^R, \bar{X}_2^R, \dots, \bar{X}_p^R) \quad (4.21)$$

El segundo paso consiste en definir un estimador de correlación construido mediante truncamientos que sustituya a S en la ecuación del estadístico  $T^2$  definido en 4.19. Así, para cada par de variables  $(X_u, X_v)$  (donde u puede ser igual a v, dando lugar a la varianza de la variable), consideramos el conjunto de observaciones  $\{(X_{iu} - \bar{X}_u^R)(X_{iv} - \bar{X}_v^R)\}_i$  sobre el que definimos unos niveles de truncamiento denotados por  $\beta_{uv}$ . Dados estos niveles definimos los estimadores de correlación<sup>47</sup>, de la forma general dada en 4.17, como:

$$S_{uv}^R = C(\beta_{uv}) \beta_{uv} - \text{Trun}(\{(X_{iu} - \bar{X}_u^R)(x_{iv} - \bar{X}_v^R)\}_i)$$

---

<sup>47</sup> Esta forma de obtener los estimadores de correlación se puede considerar la generalización de los estimadores de escala denominados " \$-Trun(x) recogidos en Ortega (2003).

donde  $C(\beta_{uv})$  son coeficientes de consistencia, invariantes ante cambios de posición y/o escala de las muestras y dependientes del nivel de truncamiento  $\beta_{uv}$ .

Si  $u=v$ , vamos a tener la contrapartida robusta de la varianza de la variable, de forma que este estimador de escala se determina de forma análoga a 4.18 como:

$$\alpha\beta\_Trun(x) = C(\alpha, \beta) \beta\_Trun[\{(x_i - \alpha\_Trun(x))^2\}_i]$$

De esta forma, definidos los estimadores de correlación para cada par de variables  $(S_{uv}^R)$ , consideramos una aproximación robusta de  $S$  de la forma:

$$S_R = (S_{uv}^R)_{u,v} \quad (4.22)$$

para  $u=1, 2, \dots, p$  y  $v=1, 2, \dots, p$ .

Una vez que tenemos los elementos necesarios, estamos en disposición de definir el nuevo estimador que vamos a denominar como  $T_R^2$ . Este estimador se obtiene sustituyendo en la ecuación del estadístico  $T^2$  (ecuación 4.19) los estimadores clásicos por los estimadores robustos definidos en 4.21 y 4.22 y se define para la observación  $i$ -ésima de la siguiente forma:

$$(T_R^2)_i = (x_{i\cdot} - \bar{X}^R) S_R^{-1} (x_{i\cdot} - \bar{X}^R) \quad (4.23)$$

donde  $\bar{X}^R$  y  $S_R$  (matriz definida positiva) son los estimadores de posición y escala mediante truncamientos. El estimador  $T_R^2$  es una aproximación robusta de  $T^2$ , proporcionando un indicador sobre el estado del proceso.

Entre las propiedades de esta aproximación robusta cabe destacar que va a ser equivariante afín. La demostración de esta afirmación es trivial, al recordar que los elementos de la familia de medias truncadas son equivariantes afín.

Además, este estimador va a estar protegido ante la presencia de outliers ya que la familia  $\{\alpha_j\}_j$  en 4.20 proporciona unos estimadores de posición protegidos ante posibles contaminaciones, dadas las propiedades de las medias truncadas, de manera que  $\bar{X}^R$  está menos influido por las observaciones atípicas que  $\bar{X}$ , utilizado en  $T^2$ . Y en segundo lugar, mediante los niveles  $\{\beta_{uv}\}_{u,v}$  en 4.17 se consigue una protección para los estimadores de correlación  $S_{uv}^R$ , de manera que  $S_R$  está igualmente menos influenciado por contaminaciones que  $S$ . En definitiva, el estimador 4.23 tiene mayor protección ante la presencia de observaciones atípicas. Además, si  $\alpha_j=0$  y  $\beta_{uv}=0$  en todos los casos, es decir, en el caso de muestras no contaminadas, entonces,  $\bar{X}^R = \bar{X}$  y  $S_R = S$  y, por lo tanto,  $T_R^2$  coincide con  $T^2$ .

Por otro lado, ya que  $(T_R^2)_i$  determina la distancia de la observación  $i$ -ésima al vector  $\bar{X}^R$  (estimador robusto de  $\mu$ ) corregida por  $S_R$  (estimador robusto de  $\Sigma$ ) y bajo el supuesto de que dichos estimadores proporcionan buenas aproximaciones de dichos parámetros, dadas las propiedades de las "Medias Truncadas", el comportamiento de  $T_R^2$  en variables  $X/NM(\mu, \Sigma)$  de dimensión  $p$  será el mismo que el de  $T^2$ . Es decir, consideraremos que el nuevo estimador se comporta asintóticamente, de la forma:

$$(T_R^2)_i \equiv \chi_p^2$$

donde  $\chi_p^2$  es la distribución Chi-Cuadrado con  $p$  grados de libertad. Por lo tanto, los límites de control considerados para  $T_R^2$  serán los mismos que para  $T^2$ . Estos límites de control se pueden considerar, de forma general, igual que en el caso del gráfico de control  $T^2$  de Hotelling como:

$$LSC = \frac{(m-1)^2}{m} \beta_{\alpha, p/2, (m-p-1)/2}$$



Para poder utilizar el estadístico propuesto en 4.23, es necesario poder construir tanto las medidas de posición 4.20 como las de correlación 4.17. Para ello, es necesario elegir unos determinados niveles de truncamientos y conocer los valores de los coeficientes de consistencia. Nosotros proponemos, bajo el supuesto de normalidad, usar como niveles de truncamiento los determinados por el procedimiento dado en Ortega (2002), y como coeficientes de consistencia (consistencia con respecto a la varianza corregida) los valores  $C(\beta) = n C_{uv}(\beta) / (n-1)$ , donde  $n$  es el tamaño muestral y  $C_{uv}(\beta) = [\beta\_Trun(X)]^{-1}$  donde  $X \equiv \chi_1^2$ . Estos coeficientes de consistencia son los obtenidos en el trabajo de Ortega (2000) para  $u=v$ , mientras que para  $u \neq v$  son aproximaciones.

Por otro lado, en 4.23 es necesario que la matriz  $S_R$  sea definida positiva, ya que en caso contrario  $T_R^2$  no sería una distancia. Este supuesto está asegurado si la elección de los niveles de truncamiento es la adecuada. En la práctica, siguiendo el procedimiento propuesto, los niveles obtenidos en diferentes ejemplos y simulaciones han generado matrices definidas positivas, por lo que  $T_R^2$  queda bien definida.

De esta forma, queda definida una posible alternativa robusta al gráfico de control  $T^2$  de Hotelling cuando manejamos observaciones individuales, esta aproximación se puede generalizar al caso de tener subgrupos racionales de observaciones, pero en este caso el número de niveles de truncamiento necesarios aumentaría, ya que va a ser necesario determinar un nivel de truncamiento para aplicar a cada subgrupo, así como un nivel de truncamiento global para determinar la media de las medias muestrales.

Otro procedimiento alternativo recogido en la literatura para el desarrollo el estadístico  $T^2$  robusto, pero con una aplicación nula en control estadístico de la calidad, consistiría en la utilización de estimaciones robustas de posición y escala obtenidas mediante el procedimiento MCD descrito anteriormente. En este caso,

sustituimos los estimadores clásicos de posición y escala por estimadores robustos determinados mediante MCD, que vamos a denotar como  $\bar{X}^*$  y  $S^*$ . Además, sabemos que el estimador  $\bar{X}^*$  constituye un estimador insesgado de la media poblacional mientras que por contra, el estimador  $S^*$  es necesario corregirlo por un valor  $c$  para conseguir una aproximación insesgada de la matriz de varianzas-covarianzas poblacionales.

Si sustituimos estos estimadores en el gráfico de control  $T^2$  de Hotelling vamos a obtener una alternativa robusta, mediante estimadores MCD, de la siguiente forma:

$$(T_{MCD}^2)_i = (x_{i.} - \bar{X}^*) S^{*-1} (x_{i.} - \bar{X}^*) \quad (3.24)$$

El gráfico de control desarrollado mediante este estadístico  $T^2$ , igual que ocurría con el gráfico  $T_R^2$  va a coincidir con el gráfico de control  $T^2$  clásico. En caso de no existir observaciones atípicas en la muestra, cuya distribución ha sido analizada en el trabajo de Hardin y Rocke (1999), llegando a la conclusión de que este estadístico se distribuye como:

$$(T_{MCD}^2)_i \equiv \frac{c(g-p+1)}{p g} F_{p, g-p+1}$$

donde  $c$  es una constante que satisface que  $E[S_X^*] = c \mathbf{E}$  y  $g^{48}$  es un grado de libertad desconocido. Estos parámetros hay que estimarlos mediante:

$$\hat{g} = \frac{2}{C\hat{V}^2} \quad \hat{c} = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^h s_{ii}^*$$

---

<sup>48</sup> En la mayoría de manuales de estadística robusta este grado de libertad viene denotado con una  $m$ , en este caso hemos usado  $g$  para no confundir este grado de libertad con el tamaño de las muestras en el caso de que utilicemos observaciones agrupadas en subgrupos racionales.

donde  $h$  es el número de observaciones incluidas en la muestra MCD,  $s_{ii}^*$  son los elementos de la diagonal principal de  $S^*$  y  $\hat{CV}$  es el coeficiente de variación (estimado) de los elementos de la diagonal principal del estimador de escala MCD. Este coeficiente de variación se puede obtener mediante simulación o por una aproximación asintótica de la matriz de varianzas-covarianzas MCD. Hay que destacar, que la simulación se va a usar sólo para calcular la media y varianza de los elementos de la diagonal de la matriz de varianzas-covarianzas y no la distribución del estadístico  $T^2$ . Como los elementos de la diagonal son independientes e idénticamente distribuidos, podemos simular  $N$  copias de la matriz de dispersión MCD (pxp) desde las  $n$  observaciones de cada muestra y entonces estimar  $c$  y  $g$  como la media y coeficiente de variación de los  $Np$  elementos de la diagonal.

Una expresión alternativa consiste en utilizar la expresión asintótica del parámetro  $c$  que viene dada como:

$$c = \frac{P(\chi_{p+2}^2 < \chi_{(p, h/n)}^2)}{h/n}$$

donde  $\chi_v^2$  es una variable aleatoria chi-cuadrado con  $v$  grados de libertad, y  $\chi_{v,\epsilon}^2$  es el punto de corte, para una variable chi cuadrado con  $v$  grados de libertad. Para  $g$ , la aproximación asintótica se comporta bien solamente con muestras de tamaño grande por lo que, en muestras de tamaño pequeño (como es el caso, en general, de las muestras usadas en control estadístico de la calidad), se va a determinar mediante simulación.

En definitiva, como hemos podido analizar a lo largo de este capítulo, cuando se utilizan los gráficos de control clásicos, utilizando como estimadores de posición y escala el vector de medias y la matriz de varianzas-covarianzas muestrales, puede ocurrir que la presencia de observaciones atípicas influya de tal modo en los estimadores que conforman la medida que no sea detectada ninguna observación

fuera de control. Es decir, en presencia de observaciones atípicas las estimaciones de los parámetros pueden ser erróneas, al tiempo que el gráfico de control no detecta que el proceso está fuera de control.

En la literatura especializada existen diversos procedimientos para construir gráficos de control mediante estimadores robustos. En general, estos procedimientos proporcionan estimaciones en el período base que serán más adecuadas para la definición de las medidas de control en el período de vigilancia, dado su comportamiento ante observaciones atípicas, eliminando la tarea de realizar cálculos iterativos en el caso de observaciones fuera de control.



# **CAPÍTULO 5**

## **TRATAMIENTO CLÁSICO DE LA AUTOCORRELACIÓN EN CONTROL DE LA CALIDAD**

### **5.1. INTRODUCCIÓN**

Los gráficos de control desarrollados desde una óptica clásica están basados en la suposición de independencia en las observaciones. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones industriales actuales, este supuesto no es adecuado ya que en la práctica se observa un cierto grado de autocorrelación, debida bien a la propia naturaleza del proceso (existencia de inercia en el proceso), o como consecuencia de la forma de obtención de información muestral.

Este motivo se hace necesario desarrollar técnicas que permitan llevar a cabo el control de calidad teniendo en cuenta el posible comportamiento autocorrelacionado de las observaciones, bien para su eliminación cuando sea producto de la recogida muestral o para su análisis cuando ésta aporte información importante sobre el comportamiento del proceso.

Cuando se ignora la existencia de autocorrelación en la elaboración de un gráfico de control, obtenemos un aumento sustancial en el número de falsas alarmas (situaciones consideradas como fuera de control cuando realmente no presentan ese comportamiento). Esta situación suele deberse a la mala ubicación de los límites de control y no es deseable para el buen desarrollo del proceso productivo debido a los efectos económicos que ocasiona.

En la literatura, y en ocasiones en la práctica, pueden encontrarse numerosas situaciones en las que se produce una mala ubicación de los límites de control debido fundamentalmente al incumplimiento de la hipótesis de independencia. Alwan y Roberts (1995) destacan que de una muestra de 235 aplicaciones de gráficos de control, extraídas de manuales, software y revistas especializadas, cerca del 85% presentan unos límites de control situados de forma incorrecta; más del 50% de estos límites mal ubicados son producto del incumplimiento de la hipótesis de independencia.

Este problema está presente desde los orígenes del control estadístico de la calidad. En Shewhart (1931)<sup>49</sup> puede encontrarse un ejemplo donde se intenta controlar la resistencia eléctrica de un material aislante mediante una serie de 204 observaciones agrupadas en 51 muestras de tamaño cuatro, obteniendo que ocho medias muestrales exceden los límites de control. Si analizamos esta información podemos observar que existe autocorrelación positiva, por lo que los límites de control aparecen mal situados, generando valores fuera de control que realmente no lo están y dejando de detectar algunos que sí suponen una alteración del modelo.

En Montgomery (1997) se lleva a cabo el análisis de 100 medidas de viscosidad para un determinado proceso químico. En base a esta información se lleva a cabo un control de calidad estándar suponiendo que las observaciones son independientes obteniendo que 19 observaciones aparecen situadas fuera de control.

---

<sup>49</sup> El ejemplo proviene de la página 20 del citado libro, si bien aparece analizado de forma extensa en el artículo de Alwan y Roberts (1995).

Sin embargo, si se controlan los datos teniendo en cuenta la autocorrelación existente en las observaciones no hay motivos para sospechar de la presencia de causas especiales de variación. En este caso la concentración de los líquidos varía a lo largo del tiempo y depende de la concentración previa, introduciendo autocorrelación.

La alternativa más utilizada en la literatura especializada<sup>50</sup> para evitar los efectos negativos derivados de la existencia de autocorrelación consiste en la elaboración de gráficos de control para los residuos de un modelo de series temporales. El comportamiento de estos residuos va a ser adecuado para aplicar un gráfico de control clásico, ya que presentan una distribución aproximadamente normal y no aparece autocorrelación, dos hipótesis básicas en gráficos de control.

En las técnicas tradicionales de control de calidad, se supone que el proceso presenta un comportamiento aleatorio entorno a un valor objetivo<sup>51</sup>, que sólo cambiará ante la presencia de causas especiales de variación. El comportamiento modelizado mediante series temporales es diferente, la media del proceso puede desviarse mucho de ese valor objetivo y esta variación no tiene por qué deberse necesariamente a una causa asignable. Puede deberse a la existencia de un factor de inercia en el proceso, causante de autocorrelación en la serie de observaciones.

En los siguientes epígrafes abordaremos la utilización clásica de modelos de series temporales para tratar de paliar el efecto de la autocorrelación. El epígrafe 5.2 presenta una relación comentada de los principales trabajos desarrollados en este sentido. Posteriormente, se recoge la metodología empleada desde un punto de vista univariante, se analizan los supuestos que la justifica, y se discute su aplicación y limitaciones en control de calidad. Por último, en el epígrafe 5.4 vamos a recoger la propuesta desarrollada desde un punto de vista multivariante.

---

<sup>50</sup> Otra alternativa consistiría en la modificación de los límites de control para obtener un comportamiento determinado del gráfico en términos de ARL. Este método no lo vamos a analizar en este apartado, ya que fue recogido anteriormente.

<sup>51</sup> Normalmente estimado mediante la media del proceso.





## **5.2. PRINCIPALES TRABAJOS DESARROLLADOS PARA CONTROLAR PROCESOS AUTOCORRELACIONADOS**

Como hemos comentado anteriormente, el problema asociado a la falta de independencia entre las observaciones está presente en control estadístico de calidad desde sus orígenes. Sin embargo, no es hasta la difusión de los métodos de filtrado de series temporales propiciada por los trabajos de Box y Jenkins (1963, 1970) cuando se aborda un tratamiento sistemático del problema y se desarrollan los primeros resultados para mitigar sus efectos perniciosos. Producto del éxito alcanzado por la metodología ARIMA, numerosos autores han estudiado el efecto que la autocorrelación tiene sobre los gráficos de control, naturalmente adoptando un enfoque autorregresivo integrado y de medias móviles (ARIMA) para modelizar el proceso generador de los datos. Casi todos estos trabajos han sido desarrollados siguiendo una óptica univariante, es decir, tratando las características de calidad de forma independiente. Entre estos trabajos cabe destacar los desarrollos de Johnson y Bagshaw (1974), Berthouex, Hunter y Pallesen (1978), Ermer, Chow y Wu (1979), Alwan y Roberts (1988), Montgomery y Mastrangelo (1991), Harris y Ross (1991), Wardell y otros (1995), Schmid (1997b), Zhang (1998), Wieringa (1999) o Jiang, Tsui y Woodall (2000).

Box y Jenkins (1963) desarrollan uno de los primeros gráficos usados para considerar la autocorrelación en los datos, asumen que la característica de calidad,  $x_t$ , evoluciona desde su valor objetivo de acuerdo con un modelo ARIMA(0,1,1) y obtienen un gráfico cuyos límites se calculan con el fin de minimizar el coste total de funcionamiento del proceso. El procedimiento de minimización del coste requiere un equilibrio entre el coste de estar fuera de control y el coste de reajustar la máquina.

Johnson y Bagshaw (1974) obtienen la distribución aproximada del recorrido de racha para el gráfico CUSUM cuando las observaciones se obtienen mediante un modelo AR(1) o MA(1). En este trabajo se muestra que el gráfico CUSUM no es robusto con respecto a desviaciones de la suposición de independencia y que pueden obtenerse conclusiones erróneas usando un procedimiento CUSUM con observaciones autocorrelacionadas.

Ermer, Chow y Wu (1979) modelizan el proceso mediante un modelo ARMA(p, p-1), utilizando posteriormente la suma de residuos al cuadrado del proceso y el modelo como un indicador de control del proceso. Aplican este procedimiento a datos procedentes de un reactor nuclear y muestran que su propuesta es más sensible a cambios en el proceso que el gráfico Shewhart clásico.

Alwan y Roberts (1988) desarrollan una aproximación muy interesante para el problema de observaciones correlacionadas en control estadístico de la calidad. Se considera que el comportamiento del proceso se puede modelizar mediante un modelo ARIMA. Una vez llevada a cabo esta modelización, usan dos gráficos de control: uno, denominado gráfico de causas comunes (CCC), elaborado con las predicciones obtenidas tras el filtrado; este gráfico sirve para estudiar el nivel del proceso y su evolución a través del tiempo, sin límites de control en su desarrollo inicial. El segundo, denominado gráfico de control para causas especiales (SCC), es un gráfico de control clásico establecido sobre los residuos o errores de predicción; salvo algunas excepciones, los residuos deben ser independientes e idénticamente distribuidos y, por lo tanto, cumplen los requisitos establecidos en los gráficos de control clásicos. Entre los principales atractivos de esta propuesta de Alwan y Roberts (1988) destacan:

- Considera que el proceso está autocorrelado para poder hacer predicciones de la calidad futura.

- El gráfico SCC está basado en la suposición de que los residuos son aleatorios, independientes y normalmente distribuidos, por lo que puede aplicarse cualquier gráfico clásico para detectar causas asignables.
- La metodología usada para obtener los gráficos es sencilla y no requiere un gran conocimiento estadístico por parte del usuario, ya que existen diversos programas informáticos disponibles para manejar series temporales.
- A diferencia de otros métodos para tratar observaciones correlacionadas que han sido limitados a modelos AR(1) y MA(1), este método puede ser aplicado a cualquier tipo de modelo de series temporales.

Montgomery y Mastrangelo (1991) consideran el gráfico de control EWMA como una aproximación simple y flexible al análisis de procesos con autocorrelación positiva, por lo que proponen controlar los errores de predicción procedentes de la aplicación de un EWMA. Este procedimiento es una aproximación de un modelo ARIMA mediante un EWMA para obtener predicciones, y usar los errores de predicción como el elemento sobre el que llevar a cabo el gráfico de control.

Harris y Ross (1991) investigan el efecto de la autocorrelación en los gráficos CUSUM y EWMA, llegando a la conclusión de que deben aparecer errores relacionados con el estado de control estadístico si no tenemos en cuenta la estructura de correlación de las observaciones. En este artículo se analizan también los métodos de series temporales para hacer frente a la autocorrelación llegando a la conclusión de que el comportamiento de estos gráficos de control para los residuos ante la presencia de un nivel de autocorrelación positiva fuerte no es correcto.

Wardell y otros (1995) llevan a cabo un análisis de la robustez de los gráficos tradicionales para datos autocorrelacionados cuando el comportamiento del proceso se puede describir mediante un modelo ARMA(1,1). Desarrollan una comparativa

del comportamiento de los gráficos EWMA, Shewhart y los gráficos CCC y SCC propuestos en Alwan y Roberts (1988). En este caso llegan a la conclusión de que el comportamiento de los gráficos clásicos ante procesos autocorrelacionados no es en general adecuado, recomendando el uso de los gráficos propuestos por Alwan y Roberts (1988). También destacan el buen comportamiento del gráfico EWMA para detectar cambios de relativa magnitud cuando el parámetro autorregresivo es negativo y el de media móvil positivo. Para analizar el comportamiento de los distintos gráficos de control usan el clásico ARL y lo que denominan función dinámica de respuesta al cambio, que describe cómo la predicción (los residuos en el gráfico de causas especiales) debe reaccionar de forma dinámica a un cambio en la media del proceso si no hay ruido en el mismo.

En Schmid (1997b) se propone una modificación del gráfico de control EWMA que mejora su comportamiento para los residuos ante la presencia de autocorrelación positiva, presentando un comportamiento similar al gráfico EWMA para los residuos en el caso de que exista autocorrelación negativa. Esta modificación consiste en sustituir la varianza del estadístico EWMA en los límites de control por una varianza que tenga en cuenta el comportamiento autocorrelado del proceso.

Zhang (1998) critica la aplicación de un gráfico de control sobre los residuos procedentes del filtrado de la información dado que, éste presenta una menor capacidad de detección que el gráfico de control original, está condicionado al comportamiento estacionario del proceso y además su comportamiento es muy pobre cuando existe autocorrelación positiva. Para mejorar el comportamiento de los gráficos de control ante procesos autocorrelacionados, propone lo que denomina gráfico EWMAST (gráfico EWMA para procesos estacionarios) consistente en controlar directamente las observaciones considerando el comportamiento autocorrelacionado mediante una modificación de los límites de control. Si la

correlación es positiva, los límites del gráfico EWMAST son más amplios que los del gráfico ordinario, estimando la varianza del EWMAST como<sup>52</sup>:

$$\sigma_x^2 = \text{var}[Z_t] = [\lambda / (2 - \lambda)] \sigma_x^2 \cdot \left[ 1 - (1 - \lambda)^{2t} + 2 \sum_{k=1}^{t-1} \rho(k) (1 - \lambda)^k \cdot [1 - (1 - \lambda)^{2(t-k)}] \right]$$

o en su forma asintótica:

$$\sigma_z^2 = \text{var}[Z_t] = [\lambda / (2 - \lambda)] \sigma_x^2 \cdot \left[ 1 - + 2 \sum_{k=1}^{t-1} \rho(k) (1 - \lambda)^k \cdot [1 - (1 - \lambda)^{2(t-k)}] \right]$$

donde  $\mathbf{D}(k)$  recoge la autocorrelación de las observaciones en el retardo  $k$ . Cuando usamos esta aproximación para una secuencia de observaciones i.i.d,  $\mathbf{D}(k)=0$  para  $k \neq 1$ , por lo tanto, el término entre paréntesis en las ecuaciones anteriores es igual a la unidad y la varianza coincide con la del EWMA, por lo que éste se puede considerar como un caso particular del EWMAST. Esta alternativa ha sido utilizada posteriormente por Adams y Tseng (1998) o Lu y Reynolds (1999).

Wieringa (1999) lleva a cabo una comparación del comportamiento de los distintos gráficos de control univariantes (Shewhart, CUSUM y EWMA) ante procesos AR(1). Para ello analiza su comportamiento ante las opciones de usar límites de control empíricos o recurrir a la modelización mediante series temporales. El trabajo llega a la conclusión de que no existe una supremacía de ninguno de los métodos aplicados sobre los distintos gráficos de control. El gráfico Shewhart para los residuos se comporta mejor ante autocorrelación negativa; el gráfico EWMA con los límites de control modificados se comporta mejor para los residuos de un modelo de series temporales AR(1); y el gráfico de control CUSUM para los residuos presenta un comportamiento mejor ante la presencia de autocorrelación en las observaciones. Además, propone una alternativa denominada gráfico de control de los residuos modificados, que es una fusión de las dos

---

<sup>52</sup> La forma de obtener esta varianza se puede analizar en la página 27 de Zhang (1998).

alternativas anteriores, es decir, un gráfico de control con límites modificados para los residuos de un modelo  $AR(1)$ . Esta alternativa mejora el comportamiento del gráfico de control Shewhart cuando existe autocorrelación positiva en las observaciones, situación muy frecuente en las aplicaciones del control estadístico de calidad.

Jiang, Tsui y Woodall (2000) proponen el gráfico ARMA basado en el control de la predicción obtenida. Este gráfico presenta un comportamiento tan bueno como el EWMA para observaciones independientes y es mejor que el SCC de Alwan y Roberts (1988) y el EWMAST de Zhang (1998).

En el caso de información multivariante, la mayoría de trabajos sugieren modelizar las distintas variables utilizadas como si fueran variables independientes. El procedimiento consiste en aplicar un modelo de series temporales desarrollado bajo la metodología de Box y Jenkins sobre cada una de las variables y, posteriormente, unir los residuos para tener un conjunto de valores (residuos) incorrelados, con los que se obtienen los diversos gráficos de control. Esta forma de enfocar el problema va a suponer una pérdida del enfoque multivariante y la omisión de la información contenida en la estructura de correlación cruzada.

Sin embargo, existen algunos trabajos desarrollados para llevar a cabo un control de calidad sin perder el enfoque multivariante. En Runger (1996) se propone una metodología basada en la descomposición en componentes principales. En concreto, propone reunir los autovectores de mayor autovalor en una componente asociada al comportamiento general del proceso, constituyendo el resto de vectores propios (de menor autovalor) la componente residual utilizada para trazar un gráfico de control clásico. Sin embargo, no se aborda un criterio claro de decisión sobre cuántos autovectores forman parte de cada una de las componentes, dejándolo a la consideración del usuario en cada situación práctica. Tampoco se analiza el comportamiento de la componente general, asumiendo que ésta describe la evolución “natural” del proceso considerando, por tanto, que está siempre bajo control. Por lo tanto, sólo analiza la evolución de la parte residual, que debería

recoger el efecto de las causas asignables. Sin embargo esta conclusión no está justificada; una alteración cuyos efectos se prolonguen en un lapso de tiempo moderado puede aparecer dentro de las primeras componentes principales, sin que esto suponga que forma parte de la evolución “natural” del proceso. Esto supone que el planteamiento expuesto en Runger (1996) está diseñado para detectar causas asignables de variación cuyos efectos sean puntuales o se desvanezcan rápidamente en el tiempo, despreciando la otra posibilidad.

Tal vez el trabajo más general desde un punto de vista multivariante aparece en Pan (2002). En él se justifica que la posible autocorrelación muestral se puede recoger convenientemente en la parte autorregresiva de un modelo VARMA, por lo que propone ajustar un modelo VAR(p) a la observaciones originales y construir un gráfico de control para los residuos, que deben estar libres de autocorrelación si el modelo está correctamente especificado. De nuevo, al igual que el trabajo de Runger (1996), sólo se analiza la componente residual, obviando la evolución general del proceso, en la que puede estar recogido el efecto de causas de variación con permanencia temporal moderada.

Como puede observarse, el problema de la existencia de autocorrelación muestral dentro de un planteamiento multivariante de los gráficos de control se ha abordado parcialmente. El enfoque adoptado en la bibliografía especializada consiste en la obtención de unos residuos que estén libres de este problema, bien a través del uso de componentes principales bien, en la mayoría de los casos, tras el filtrado de la información mediante un modelo VAR(p). Sin embargo, no se generaliza el planteamiento de Alwan y Roberts (1988) ya que en ningún caso se aborda la construcción de un gráfico de control sobre la componente no residual, obviando con ello el efecto de alteraciones en el proceso generador de datos de relativa permanencia temporal. También, como consecuencia obvia, no se considera la información que puede proporcionar la evolución de ambas componentes, que recogería qué alteraciones son puntuales y cuáles más persistentes. La importancia económica de ambos tipos de alarmas es claramente distinta, ya que la primera presenta un impacto reducido en el tiempo (aunque pueda ser de alta magnitud),



mientras que la segunda tendrá un impacto generalmente mayor, al afectar a más volumen de producción. Desde un punto de vista técnico, esta característica puede condicionar los resultados del ARL estimado, pieza clave para analizar la validez de los gráficos de control desarrollados.

Por ello, tiene interés el desarrollo de una metodología de construcción de gráficos de control que solvante el problema asociado a la autocorrelación. En esta línea, el objetivo principal que se persigue en este trabajo es la utilización de la metodología de espacio de los estados para modelizar una serie temporal multivariante y construir dos gráficos de control asociados a ésta que superen las limitaciones comentadas de los planteamientos existentes en la literatura especializada.

### 5.3. CONTROL DE LA CALIDAD EN PROCESOS UNIVARIANTES AUTOCORRELACIONADOS

Una posible solución al efecto negativo de la autocorrelación en los gráficos de control consiste en utilizar como input los residuos de un modelo de series temporales. Dentro de éstos, los más utilizados, en la literatura especializada, están encuadrados dentro de la metodología Box-Jenkins (modelos ARIMA)<sup>53</sup>. El comportamiento de los residuos va a ser adecuado para poder aplicar un gráfico de control clásico, ya que, si el modelo se ajusta de forma adecuada, van ser independientes y normalmente distribuidos, hipótesis básicas en el enfoque clásico.

El conjunto de observaciones que tenemos va a ser considerado una serie temporal, es decir, una sucesión de observaciones tomadas en el transcurso del tiempo. Sin pérdida de generalidad, vamos a suponer que las observaciones han sido generadas por un proceso estocástico lineal (de medias móviles, autorregresivo o mixto), y concretando más, el proceso tiene que ser discreto entendiendo como tal el proceso que se puede representar mediante una serie de ruidos blancos. Estos ruidos blancos van a tener media nula, varianza constante y covarianza nula, es decir, un proceso homocedástico, no autocorrelacionado y de media nula. De estos modelos, la mayoría de aplicaciones utilizan los mixtos (ARMA), que van a recoger un proceso autorregresivo y de medias móviles, considerando que en control estadístico de la calidad, el comportamiento del proceso va a ser estacionario.

El modelo ARMA en su forma más general va a tener la siguiente forma:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \epsilon_{t-q} + \delta \quad (5.1)$$

---

<sup>53</sup> En caso de tener más de una variable aplicaríamos un modelo ARIMA sobre cada una de las variables de tal forma que vamos a obtener unos residuos para cada variable empleados para llevar a cabo el control de la calidad bien considerándolos de forma conjunta o individual.

Este modelo va a recoger un proceso autorregresivo que explica el comportamiento de la variable mediante el valor que tomaba dicha variable en períodos anteriores y un proceso de medias móviles que recoge el comportamiento de la variable dependiente del valor de la perturbación aleatoria en períodos anteriores de tiempo. Este modelo se denota como ARMA(p, q) donde  $p$  indica el retardo máximo de la parte autorregresiva y  $q$  señala el correspondiente a la parte de medias móviles, lo más normal es que estos retardos no superen en ningún proceso lineal el valor de dos. Si utilizamos una notación polinómica podemos recoger el modelo anterior de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Y_t (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 \dots + \phi_p B^p) = \\ = \varepsilon_t (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 \dots - \theta_q B^q) + \delta \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde el valor  $B$  indica el operador retardo que estamos utilizando.

Cuando no se cumple la hipótesis de estacionariedad, situación poco frecuente en control de calidad, este incumplimiento puede ser:

1. En media, en cuyo caso habrá que calcular la serie en diferencias respecto a la media. Estas diferencias, normalmente, no exceden el nivel dos y hay que tenerlas en cuenta una vez finalizado el proceso.

2. En varianza, en este caso tendremos que utilizar una transformación instantánea en los datos. Si los datos son heterocedásticos, es decir, las varianzas no son constantes, es posible utilizar lo que se denomina transformación lambda o Box-Cox, siendo lo más frecuente utilizar la información en términos logarítmicos.

Por lo tanto, para evitar la no estacionariedad es necesario aplicar logaritmos a la serie original, para poder corregir la posible no estacionariedad en varianza y, posteriormente, diferenciar la serie una o dos veces para eliminar la posible no estacionariedad en media. De esta forma, obtendríamos una serie estacionaria.

Los modelos ARIMA van a ser una extensión de los modelos ARMA cuando los datos presentan un comportamiento no estacionario. Este modelo ARIMA que vamos a denotar como ARIMA( $p, d, q$ ) va a recoger el número de diferenciaciones que hay que aplicar para convertir un proceso no estacionario mediante el valor del parámetro  $d$ . De aquí en adelante consideraremos que el comportamiento del proceso es estacionario, suposición no descabellada en control estadístico de la calidad y que nos va a permitir un análisis más sencillo.

La mayor dificultad en la aplicación de estos modelos de series temporales aparece a la hora de ajustar el modelo más adecuado a la información. Para la identificación de este modelo, normalmente vamos a utilizar el comportamiento de la función de autocorrelación y la función de autocorrelación parcial, que nos van a permitir determinar el valor de los parámetros  $p$  y  $q$ . El valor del parámetro  $d$ , normalmente se determina mediante el análisis de la representación gráfica de la información una vez aplicados distintos niveles de diferenciación.

La mayoría de procesos de producción, muestran un comportamiento que se puede recoger mediante un modelo autorregresivo (AR( $p$ )). En este trabajo, y dado que esta modelización no es el objetivo principal del mismo, vamos a analizar el comportamiento de modelos autorregresivos de orden uno (AR(1))<sup>54</sup>, de gran utilidad y aplicación, como hemos visto en el epígrafe anterior, en control estadístico de la calidad. Estos modelos AR(1) van a presentar la siguiente forma:

$$(Y_t - \mu) = \phi (Y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t \quad (5.3)$$

donde  $\mathbf{g} \sim N(0, \mathbf{F}_g)$ .

---

<sup>54</sup> Esta situación se puede generalizar a cualquier modelo ARIMA de forma sencilla, aunque en este trabajo solamente vamos a considerar modelos AR(1) ya que estos modelos recogen de una forma bastante acertada el comportamiento de la mayoría de procesos de producción.

Si usamos un modelo AR(1) para representar el comportamiento de las observaciones, la varianza de la característica de calidad se va a calcular como:

$$\sigma_Y^2 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \phi^2} \quad (5.4)$$

Hay que tener en cuenta que tenemos  $n$  observaciones independientes para elaborar el gráfico de control y que vamos a necesitar la media y la dispersión del proceso para establecer el gráfico de control. Si desconocemos estos valores, para estimar la media se utiliza la media global del proceso que va a ser un estimador insesgado de la media poblacional y la dispersión se puede estimar mediante la media del rango móvil corregida por un factor  $d_2$ . De tal forma que tendríamos:

$$\hat{\sigma}_Y = \frac{\bar{MR}}{d_2} \quad \text{donde} \quad \bar{MR} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n MR_i$$

$$MR_i = |Y_i - Y_{i-1}|$$

donde  $d_2$  es un factor analizado en el capítulo 2 que aparece tabulado en la mayoría de manuales de control estadístico de la calidad.

Si las observaciones son independientes, el estimador anterior va a ser un estimador insesgado de la varianza, pero si las observaciones proceden de un proceso autocorrelacionado este estimador va a presentar cierto sesgo en su comportamiento. Concretamente en el caso de un proceso autorregresivo de orden uno vamos a tener que:

$$E \left[ \frac{\bar{MR}}{d_2} \right] = \sqrt{1 - \phi} \cdot \sigma_Y \quad (5.5)$$

De tal forma que si existe autocorrelación negativa ( $\mathbf{N} < 0$ ) entre las observaciones se produce una sobreestimación en el valor de la varianza mientras que, cuando esta autocorrelación es positiva ( $\mathbf{N} > 0$ ) lo que se produce es una infraestimación de dicha varianza. Esto se puede interpretar de la siguiente forma:

las variaciones en cortos períodos de tiempo vienen recogidas en el estimador clásico de la variabilidad utilizando el rango medio móvil mientras que, las variaciones en largos períodos de tiempo, recogidas en la varianza de la variable, se escapan de esta estimación clásica. Por lo tanto, si utilizamos la propuesta clásica, la variabilidad que estamos recogiendo no es representativa del conjunto del proceso y sólo recoge las variaciones que se producen en períodos de tiempo cortos.

Por lo tanto, cuando en el proceso aparece autocorrelación positiva se produce una infraestimación de la varianza que va a producir una ubicación demasiado ajustada de los límites de control. Esta mala ubicación va a llevar a que se produzcan numerosas falsas alarmas en el gráfico de control. Por contra, cuando existe autocorrelación negativa lo que se produce es una sobreestimación de la varianza que nos va a llevar a tener unos límites de control demasiado amplios que, en la mayoría de los casos, van a ser insensibles ante cambios en la media del proceso.

Como se puede observar, en el caso AR(1), y por extensión para cualquier caso en el que exista autocorrelación en los datos, existe un problema en la elaboración de los gráficos de control para procesos autocorrelacionados motivado por la presencia de sesgo en el estimador clásico de la varianza. Una vez detectada la autocorrelación va a ser fácil obtener un estimador insesgado de la varianza recurriendo a: multiplicar el estimador por un factor que corrector del sesgo existente en la estimación o estimar la varianza de los residuos y multiplicarla por un factor adecuado para obtener una estimación de la varianza del proceso (ver Brockwell y Davis, 1991).

Podríamos plantearnos la adecuación de utilizar los gráficos de control con los límites situados a tres desviaciones típicas en el caso de que las observaciones presenten autocorrelación, ya que estos gráficos de control han sido diseñados para observaciones independientes. Como hemos comentado anteriormente habrá que tener en cuenta la autocorrelación a la hora de establecer el gráfico, pero también

va a ser importante el análisis del efecto que esta autocorrelación va a tener sobre el comportamiento del ARL en cada caso. En este sentido, basandonos en el trabajo de Wieringa (1999) vamos a analizar el comportamiento de los distintos gráficos de control univariantes ante la presencia de un comportamiento AR(1) en las observaciones.

Dentro de estos gráficos clásicos vamos a analizar primero el comportamiento de los gráficos de control Shewhart, es importante hacer este matiz ya que, a diferencia de los gráficos EWMA y CUSUM, cuando manejamos un gráfico Shewhart el estadístico que utilizamos en el gráfico no va a estar suavizado. Además, vamos a analizar estos gráficos por separado para evitar la posible confusión de cambios en la eficiencia debido a la distinta naturaleza de los gráficos y a la presencia de autocorrelación en el proceso.

Para analizar la eficacia de cada uno de los gráficos de control clásicos cuando utilizamos los residuos de una modelización AR(1) vamos a recurrir a analizar el comportamiento del recorrido medio de racha (ARL).

Vamos a empezar por el comportamiento en el gráfico Shewhart. Si denotamos por  $X_t$  a una observación, resultado de una medida de una muestra o consecuencia de una observación individual. Suponemos que la varianza de la variable  $X$  va a permanecer constante a lo largo del tiempo en un valor  $\sigma_X^2$  y que si se produce una causa de variación, ésta puede llevar a un cambio en la media del proceso. Si asumimos normalidad, suposición muy aplicada dentro del campo del control estadístico de la calidad, tenemos que el modelo que sigue  $X_t$ , es:

$$X_t \sim N(\mu, \sigma_X^2)$$

Vamos a obtener sucesivas observaciones  $X_t$  que vamos a considerar que están distribuidas de forma independiente. El valor esperado de  $X_t$  está referido al tiempo para indicar que la media del proceso puede cambiar debido a causas especiales de

variación. Una variación ocurrida en un momento del tiempo  $T$  de  $*$  desviaciones típicas puede ser modelizada como:

$$\mu_t = \begin{cases} \mu & \text{para } t < T \\ \mu + \delta \sigma_X & \text{para } t \geq T \end{cases} \quad (5.6)$$

El tamaño del cambio viene medido en número de desviaciones típicas, ya que de esta forma es posible comparar gráficamente procesos que presenten distinta variabilidad.

El gráfico de control Shewhart tiene los límites de control situados a tres desviaciones típicas de la media, por lo que, después de que ocurra un cambio de  $*$  desviaciones típicas ( $*F_x$ ), podemos determinar la probabilidad de que esta observación caiga dentro de los límites de control de la siguiente forma:

$$P(\delta) = P(\mu - 3 \sigma_X \leq X_t \leq \mu + 3 \sigma_X) = P(Z < 3 + \delta) - P(Z < \delta - 3)$$

Cuando  $*$ =0 la probabilidad de que una observación caiga dentro de los límites de control es  $P(0)=0,9973$ , por lo tanto, es poco probable encontrar una observación fuera de control cuando no existe un cambio en la media del proceso. De esta forma, ante observaciones fuera de control vamos a considerar que se ha producido una causa especial de variación ya que no es una situación habitual en la práctica.

El ARL es definido como el número medio de observaciones situadas fuera de control (incluida la primera fuera de control) hasta detectar una situación fuera de control, la función de ARL para el caso de observaciones independientes se denota por  $ARL(*)$ , depende del tamaño del cambio que se quiere detectar y se va a calcular de la siguiente forma:

$$ARL(\delta) = \sum_{i=1}^{\infty} i P(\delta)^{i-1} [1 - P(\delta)] = \frac{1}{1 - P(\delta)} \quad (5.7)$$



El ARL bajo control (cuando no se produce ningún cambio en el proceso, ARL(0)) nos va a interesar que tome un valor lo mayor posible, ya que va suponer que el número de muestras a examinar cuando estamos en una situación bajo control hasta encontrar una situación fuera de control es grande, es decir, el número de falsas alarmas que van a aparecer va a ser pequeño. Por contra, en el caso de que se haya producido un cambio en la media del proceso de tamaño \* nos interesa que el valor del ARL(\*) sea pequeño ya que cuanto antes detectemos ese cambio en la media mejor.

En este gráfico de control se van a representar gráficamente los residuos para determinar si el proceso está situado bajo control o no, los residuos que representaremos gráficamente se calculan como:

$$e_t = Y_t - \hat{Y}_{t|t-1, t-2, \dots} \quad (5.8)$$

donde  $\hat{Y}_{t|t-1, t-2, \dots}$  es una predicción de  $Y_t$ , basada en las observaciones pasadas incluida t-1. Como se puede encontrar en distintos manuales, por ejemplo Harvey (1993), el predictor lineal que minimiza el error cuadrático medio es  $E(Y_t / Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots)$ . Si consideramos que el modelo que mejor se ajusta es un modelo AR(1) tendremos que:

$$\hat{Y}_{t|t-1, t-2, \dots} = E(Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots) = \mu + \phi (Y_{t-1} - \mu) \quad (5.9)$$

En esta modelización va a ser necesario estimar el valor de  $\mu$  y  $\phi$  utilizando para ello la serie de observaciones cuando sólo causas comunes de variación afectan al proceso. En caso contrario, cuando el proceso presente variaciones debidas a causas especiales puede comportarse de forma distinta a la habitual, lo que nos podría llevar incluso a suponer un comportamiento del mismo erróneo, motivado únicamente por la influencia de esas causas especiales. Si el proceso está bajo control, los residuos ( $e_t$ ) van a cumplir que:

$$e_t = Y_t - \hat{Y}_{t|t-1, t-2, \dots} \approx \varepsilon_t \quad \text{para todo } t$$

es decir, van a presentar un comportamiento normal e independiente, además esta relación es exacta si conocemos :  $\mathbf{y}$   $\mathbf{N}$ .

Suponemos que aparece una causa especial en un momento del tiempo  $T$  que produce un cambio en  $E(Y_t)$  por una cantidad  $\mathbf{*F}_Y$ . Como no somos conscientes de ese cambio calculamos  $e_T, e_{T+1}, \dots$  como si el proceso estuviera bajo control. Los elementos de la secuencia de residuos  $e_t$  van a cumplir que:

$$e_t \approx \begin{cases} \varepsilon_t & \text{para } t < T \\ \varepsilon_t + \delta\sigma_Y & \text{para } t = T \\ \varepsilon_t + (1 - \phi) \delta\sigma_Y & \text{para } t > T \end{cases} \quad (5.10)$$

Se puede mostrar fácilmente la forma de determinar los valores obtenidos para la secuencia de residuos anterior, así por ejemplo cuando  $t > T$  tenemos que:

$$\begin{aligned} e_t &= Y_t - \hat{Y}_{t|t-1, t-2, \dots} = Y_t - (\mu + \phi(Y_{t-1} - \mu)) = Y_t - \mu - \phi(Y_{t-1} - \mu) = \\ &= Y_t + \delta\sigma_y - \mu - \phi(Y_{t-1} + \delta\sigma_y - \mu) = Y_t - \mu - \phi(Y_{t-1} - \mu) + \delta\sigma_y - \phi\delta\sigma_y = \\ &= \varepsilon_t + (1 - \phi)\delta\sigma_y \end{aligned}$$

Resaltar que  $e_t$  está independientemente distribuida si los parámetros :  $\mathbf{y}$   $\mathbf{N}$  son conocidos o estimados de una forma correcta ya que, asumimos que  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ , en cualquier otro caso, va a ser necesario comprobar primero el comportamiento independiente de los residuos calculados.

Como se puede observar en (5.10), cuando  $\mathbf{N} > 0$ , sólo una fracción del cambio en  $E(Y_t)$  es transferida a los residuos cuando  $t > T$ , por lo tanto, este cambio va a ser más complejo detectarlo mediante un gráfico de control para los residuos, ya que ese cambio no aparece recogido en los residuos en su totalidad. Por contra, para  $\mathbf{N} < 0$  el cambio es ampliado, por lo tanto, en este caso el gráfico de los residuos nos va a permitir determinar el cambio incluso antes que con el gráfico para las

observaciones. Lo que va a suponer que el gráfico de los residuos se comporte mejor para procesos autorregresivos de orden uno con autocorrelación negativa que para procesos con autocorrelación positiva.

Si analizamos el comportamiento del gráfico de control Shewhart utilizando el ARL podemos observar que cuando la primera observación es considerada después del cambio en  $E(Y_t)$  la determinación del ARL es análoga al caso de observaciones independientes, es decir:

$$ARL(\delta) = \frac{1}{1 - P(\delta)}$$

Sin embargo, si la primera observación se toma en el mismo momento del cambio o nos interesa determinar el número esperado de observaciones que un cambio deja sin detectar, la determinación del ARL es algo diferente. La justificación de esta diferencia es debida a que la probabilidad de observar un residuo entre los límites de control en el momento del cambio difiere de la probabilidad de que un residuo caiga dentro de los límites después del cambio. Vamos a denotar como  $P(\ast)$  a la probabilidad de que un residuo caiga entre los límites de control para  $t > T$  y por  $P_1(\ast)$  a la probabilidad de que un residuo caiga entre los límites de control para  $t = T$ , en Longnecker y Ryan (1992) fue demostrado que el  $ARL_{rc}(\ast)$  (ARL para el gráfico de los residuos cuando la primera observación es tomada en el momento que se produce el cambio) se calcula como:

$$ARL_{rc}(\delta) = 1 + \frac{1}{1 - P(\delta)} P_1(\delta) \quad (5.11)$$

Resaltar que, si  $P_1(\ast) = P(\ast)$ , el lado derecho de la igualdad quedaría como  $1 / (1 - P(\ast))$  que es el ARL de los residuos si la primera observación se toma después de que se produzca el cambio o lo que es igual el ARL para el caso de observaciones independientes. La diferencia entre  $ARL_{rc}(\ast)$  y  $ARL(\ast)$  es insignificante para autocorrelación negativa, pero es mayor cuando existe autocorrelación positiva.

Esto se puede explicar mediante un ratio que relacione el tamaño del cambio con la desviación típica del proceso (denominado ratio señal-ruido), lo que nos va a permitir comparar el efecto del cambio en la media de procesos con diferentes varianzas. Definimos este ratio como el cociente entre el tamaño del cambio y la desviación típica del proceso (desviación típica del residuo en este caso, ya que estamos analizando el proceso en base a estos residuos).

- Para el momento en el que se produce el cambio,  $T$ , el tamaño del cambio que se transfiere a los residuos es aproximadamente igual a  $\delta F_Y$ . Dividiendo esta cantidad por  $\sigma_e$  tendremos que si el proceso sigue un modelo AR(1) se cumple la igualdad:

$$\frac{\delta \sigma_Y}{\sigma_e} = \frac{\delta}{\sqrt{1 - \phi^2}} \quad (5.12)$$

Este ratio converge a infinito cuando  $N$  tiende a uno, lo que supone que el cambio que se produce en el proceso va a ser muy grande respecto a la desviación típica del mismo y como resultado, la probabilidad de que el cambio sea detectado en la primera observación converge a uno cuando  $N$  tiende a 1. Por lo tanto,  $P_1(*)$  tiende a cero para  $\delta \rightarrow 0$ , esto afecta al  $ARL_{rc}(\delta)$  positivamente tendiendo al valor uno.

- Para  $t > T$ , el ratio señal-ruido es aproximadamente igual a:

$$\frac{(1 - \phi) \delta \sigma_Y}{\sigma_e} = \delta \frac{\sqrt{1 - \phi}}{\sqrt{1 + \phi}} \quad (5.13)$$

que converge a cero cuando  $N$  tiende a uno. Para valores de  $N$  muy cercanos a uno es muy difícil detectar un cambio si no es detectado en la primera observación.

Por lo tanto, podemos concluir que cuando la autocorrelación existente en el proceso es elevada va a aumentar la dificultad de detectar un cambio en el proceso cuando este cambio no es detectado en la primera observación posterior al mismo.

Como se puede observar a raíz de los resultados anteriores cuando el proceso presenta un comportamiento AR(1) con autocorrelación negativa el gráfico de control para los residuos presenta un comportamiento mejor que el gráfico de control para observaciones independientes, ya que un cambio en las observaciones es ampliado en los residuos. Por contra, ante autocorrelación positiva el comportamiento de este gráfico es peor que el gráfico para observaciones independientes ya que solamente una parte del cambio en la media es transferido a los residuos. Si bien, este comportamiento mejora a medida que el valor de  $\mathbf{N}$  se aproxima a uno.

Las conclusiones extraídas anteriormente están de acuerdo con el comentario de Ryan (1991): “Un gráfico de residuos para observaciones AR(1) se va a comportar de una manera pobre al menos que  $\mathbf{N}$  sea negativo o muy cercano a 1. En muchas aplicaciones debemos tener valores de  $\mathbf{N} > 0$  y no específicamente cercanos a uno”.

Éste es uno de los principales inconvenientes de la aplicación de un gráfico de control para los residuos en procesos autocorrelacionados recogiendo el comportamiento del proceso mediante la metodología de Box-Jenkins.

El gráfico EWMA de los residuos se establece como el propio nombre indica utilizando como observaciones los residuos. El EWMA de los residuos en el momento  $t$  es denotado por  $W_{e,t}$  y se calcula como:

$$W_{e,t} = \lambda e_t + (1 - \lambda) W_{e,t-1} \quad (5.14)$$

Asumiendo que los valores de  $\lambda$  y  $\mathbf{N}$  son conocidos, la varianza del valor EWMA para los residuos es análoga a la del gráfico de control para observaciones independientes y tendrá la siguiente forma:

$$\sigma_{W_{e,t}}^2 = \sigma_e^2 \left( \frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) [1 - (1 - \lambda)^2] \approx \sigma_e^2 \left( \frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) \quad (5.15)$$

Valor que se va a utilizar bien en su forma exacta o mediante la aproximación para determinar los límites de control del gráfico de control para los residuos, estos límites de control una vez fijado el valor de  $\delta$  y  $c$  (fijando dos puntos en la curva ARL) van a tener la siguiente forma;

$$\begin{aligned} LIC &= \mu - c \sigma_{w_{e,t}}^2 \\ LSC &= \mu + c \sigma_{w_{e,t}}^2 \end{aligned} \quad (5.16)$$

La forma de la curva ARL va a ser similar al caso de observaciones independientes, ya que estamos considerando que el modelo de series temporales ha sido fijado de forma adecuada y, por lo tanto, el comportamiento de los residuos es independiente. En términos generales el efecto de la autocorrelación en los gráficos EWMA es similar al efecto en el gráfico de control Shewhart comparándolos con el caso de observaciones i.i.d el comportamiento del ARL para autocorrelación negativa es mejor, mientras que para autocorrelación positiva el comportamiento es peor.

El gráfico de control EWMA para los residuos cuando en el proceso existe una autocorrelación fuerte se va a comportar peor que el gráfico de control con límites de control modificados. Para niveles de autocorrelación pequeños el comportamiento del ARL del gráfico de control EWMA es mejor que el gráfico de control Shewhart, sin embargo, para un nivel alto de autocorrelación el comportamiento del gráfico EWMA es similar al del gráfico de control Shewhart. Por lo tanto, para niveles elevados de autocorrelación debe ser mejor usar un gráfico Shewhart, ya que este gráfico de control es más fácil de determinar e interpretar. Esta situación va a hacer que en la aplicación práctica desarrollada en este trabajo sólo utilicemos gráficos Shewhart para los residuos.

En el caso de los gráficos de control de sumas acumuladas (CUSUM) las sumas  $S_L$  y  $S_H$  que utilizamos para determinar la situación del proceso de producción son formadas utilizando los residuos. Utilizando los residuos

procedentes de un AR(1), las sumas para el gráfico CUSUM de los residuos se van a determinar como:

$$\begin{aligned} S_{L_e,t} &= \max (S_{L_e,t-1} - e_t - k, 0) \\ S_{H_e,t} &= \max (S_{H_e,t-1} + e_t - k, 0) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Una señal fuera de control, de forma análoga a la detección cuando se consideraban las observaciones independientes, aparece si alguna de estas sumas supera el valor  $h$ . En el caso de diseñar un gráfico de control para los residuos, en Wieringa (1999) sugiere seleccionar el valor de  $k$  de tal forma que:

$$k = \frac{\delta \sigma_Y (1 - \phi)}{2} \quad (5.18)$$

Como se puede observar se trata de una selección del parámetro  $k$  análoga a la usada en el caso de observaciones independientes, ya que el valor de  $k$  aparece situado en la mitad del cambio en la media que queremos detectar. Hay que tener en cuenta que en este caso, y dado que estamos situados en las observaciones posteriores al cambio, el tamaño del cambio que se transmite a los residuos es  $\delta F_y(1 - N)$ .

Si el modelo AR(1) es el adecuado para los datos y tenemos suficiente información para asumir que los valores de los parámetros del modelo son conocidos, entonces los residuos presentan un comportamiento más o menos incorrelado, de tal forma que la aproximación del ARL para observaciones independientes puede ser usada para aproximar numéricamente el ARL del gráfico de los residuos.

Goldsmith y Whitfield (1961) fueron los primeros en estudiar el efecto de la autocorrelación en el comportamiento de los gráficos CUSUM mediante el estudio del efecto de un comportamiento autorregresivo de orden uno en un gráfico de control CUSUM máscara en V. Llegaron a la conclusión de que una autocorrelación negativa hace que el comportamiento del gráfico CUSUM sea más sensible,

mientras que una autocorrelación positiva tiene un efecto negativo en el comportamiento del gráfico de control CUSUM.

Analizando el comportamiento del ARL del gráfico de control CUSUM para los residuos se puede llegar a la conclusión de que el comportamiento de este gráfico de control es mejor en el caso de que exista autocorrelación negativa, mientras que si existe autocorrelación positiva el comportamiento del gráfico CUSUM es similar al comportamiento del gráfico EWMA. En este caso, es recomendable el gráfico CUSUM que detecta cambios inferiores a una desviación típica, ya que estos cambios se detectan un poco antes que con el EWMA.

Como se puede observar el comportamiento del gráfico de control CUSUM para los residuos es similar al gráfico de control Shewhart para los residuos presentando un mejor comportamiento ante la presencia de autocorrelación negativa, situación por otro lado poco frecuente en la mayoría de procesos productivos.

Un camino para obtener un mejor análisis de los datos cuando éstos exhiben un comportamiento autocorrelacionado, siguiendo la propuesta de Alwan y Roberts (1988), es complementar los gráficos de control desarrollados para los residuos procedentes de la modelización de series temporales con otro gráfico de control que recoja el comportamiento del conjunto de observaciones. De esta forma podemos analizar el comportamiento del proceso y detectar, al mismo tiempo, causas de variación especiales que hayan podido ocurrir con el gráfico para los residuos.

Este gráfico de control para el conjunto de observaciones nos va a permitir analizar el nivel general del proceso, así como la evolución del proceso a lo largo del tiempo, con este gráfico no vamos a encontrar causas especiales de variación a lo largo del tiempo sino que más bien no van a permitir encontrar variaciones entorno a un valor objetivo que van a requerir el desarrollo de alguna acción correctiva específica. Por lo tanto es posible complementar el desarrollo llevado a



cabo anteriormente con un gráfico que nos permita analizar el nivel general del proceso.

La modelización ARIMA, propuesta anteriormente, es una buena técnica de eliminación de la autocorrelación en procesos univariantes, pero cuando se trata de un proceso multivariante va a ser necesario aplicar estas técnicas a cada una de las variables y después aplicar gráficos de control univariantes o bien unir estos residuos y aplicar sobre los residuos unidos gráficos de control multivariantes. En este sentido existen distintos desarrollos en la literatura especializada, aunque estos desarrollos están suponiendo que el comportamiento de los residuos es independiente o la modelización de series temporales no tiene en cuenta el posible efecto proveniente de la relación existente entre las variables.

Otra alternativa, que se pretende abordar en este trabajo, nos va a llevar a obtener una interpretación más realista de la situación que nos podemos encontrar en la práctica consiste en la modelización de la información mediante modelos de series temporales múltiples. Estos modelos van a tener en cuenta el posible comportamiento autocorrelacionado de las observaciones, pero también la posible relación existente entre los residuos de distintas variables. Los residuos obtenidos para esta modelización múltiple son las variables que usaremos para llevar a cabo nuestro control de la calidad, suponiendo como en el caso anterior que los cambios en las variables se transmiten a los residuos y que el modelo de series temporales correspondientes se ajusta de forma adecuada para garantizar de esta forma que los residuos presentan un comportamiento no autocorrelado.

## 5.4. MODELOS DE SERIES TEMPORALES MULTIVARIANTES

En la mayoría de los procesos de producción, la calidad de los productos elaborados va a depender de varias características de calidad consideradas de forma simultánea. Además, en muchos casos, esta información va a presentar un comportamiento autocorrelacionado que puede deberse a: la propia naturaleza del proceso o a los mecanismos de obtención de la información.

En estos casos, los mecanismos de eliminación<sup>55</sup> de la autorocorrelación analizados en los apartados anteriores no van a ser útiles, salvo que establezcamos una extensión de esos mecanismos al caso multivariante. En algunos casos, se ha considerado la posibilidad de aplicar modelos de series temporales univariantes sobre cada una de las variables y llevar a cabo el control de la calidad sobre los residuos, unidos, de todas las series. Esta consideración no va a ser adecuada, ya que pueden aparecer problemas consecuencia de ignorar la estructura de correlación de las variables. Para solucionar estos problemas podemos aplicar modelos de series temporales múltiples que consideran la estructura de correlación.

Para poder agrupar estas dos consideraciones, eliminación de la autocorrelación sin perder la óptica multivariante, vamos a analizar la posibilidad de aplicar modelos de series temporales múltiples. A continuación, aparecen recogidos los principales modelos de series temporales múltiples resultado de la generalización de la metodología Box-Jenkins al caso multivariante. Éstos son los modelos utilizados en control de calidad para llevar a cabo el filtrado de la información, concretamente vamos a recoger modelos de vectores autorregresivos (VAR) y su extensión bayesiana (BVAR).

---

<sup>55</sup> Al hacer referencia a los mecanismos de eliminación de la autocorrelación estamos haciendo referencia básicamente a la modelización de la información mediante modelos de series temporales, dejando a un lado la posibilidad de utilizar límites de control empíricos.

### 5.4.1 MODELOS VAR

En los modelos de series temporales multivariantes<sup>56</sup> tratamos de determinar una función que recoja el comportamiento de las observaciones. Esta función debe servir para obtener buenas predicciones de las variables del modelo además, estos modelos van a recoger la dinámica de interrelación entre las variables. Dentro de estos modelos multivariantes de series temporales tenemos los modelos conocidos como vectores autorregresivos (VAR).

Un modelo autorregresivo (VAR) de orden  $p$  va a explicar el comportamiento de cada variable en función de los  $p$  valores anteriores de la variable y los  $p$  valores retrasados de las otras variables que intervienen en el análisis. Este modelo se puede formular en los siguientes términos<sup>57</sup>:

$$X_t = \mu + \Phi_1 X_{t-1} + \Phi_2 X_{t-2} + \dots + \Phi_p X_{t-p} + U_t \quad (5.19)$$

donde  $X_t$  recoge un vector de variables aleatorias,  $\mu$  es un vector de constantes de orden  $k \times 1$  y  $\Phi_i$  son unas matrices de coeficientes de orden  $k \times k$ . El término  $U_t$  representa una secuencia vectorial de perturbaciones estocásticas de orden  $k \times 1$  con esperanza nula, serialmente incorrelacionadas y matriz de varianzas y covarianzas constante<sup>58</sup>. Se asume de forma general, y concretamente en este trabajo, que la distribución de probabilidades de  $U_t$  va a ser normal multivariante ( $U_t \sim N(0, G_u)$ ). En el caso más general se admite que  $G_u$  no es una matriz diagonal, es decir, que existen interacciones contemporáneas entre las  $k$  innovaciones.

---

<sup>56</sup> Vamos a hablar de forma indiferente de modelos de series temporales multivariantes y modelos de series temporales múltiples.

<sup>57</sup> Esta formulación no es única, si bien las distintas formulaciones existentes son todas ellas equivalentes.

<sup>58</sup> Estas perturbaciones van a ser denominadas impulsos, innovaciones o choques en el lenguaje VAR y van a constituir el elemento fundamental de este trabajo.

En base a esta representación, cada variable  $X_{it}$  en un VAR es generada a partir de la suma algebraica de tres elementos:

- Valores desfasados de la propia variable (dinámica propia):

$$\sum_{h=1}^p \phi_{h,i,i} X_{i,t-h}$$

- Valores desfasados de las restantes variables (dinámica cruzada):

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \sum_{h=1}^p \phi_{h,i,j} X_{j,t-h}$$

- Una innovación específica, posiblemente correlacionada de forma contemporánea con las de las demás variables (innovación):

$$U_{it}$$

Dentro de los modelos VAR van a aparecer distintos casos particulares dependiendo de la naturaleza de las matrices (**G** y **M**), si bien nosotros nos vamos a centrar en el análisis del modelo VAR general donde ambas matrices van a ser completas.

Una vez seleccionado el modelo tenemos que determinar una estimación de los parámetros del mismo. Para llevar a cabo esta estimación, vamos a tomar como marco de referencia la regresión lineal donde los estimadores obtenidos por mínimos cuadrados (MCO) son consistentes, asintóticamente normales, insesgados y eficientes. En este momento hay que analizar si estas propiedades se van a mantener ante modelos VAR, ya que los regresores de estos modelos son estocásticos y habrá que analizar la existencia de estacionariedad o no, así como, la existencia de relación entre estos regresores y los errores.

En modelos VAR con variables estacionarias y errores independientes, las propiedades del estimador obtenido por mínimos cuadrados se mantienen. Si bien, la propiedad de estacionariedad es admisible en estos modelos, la independencia

de los errores no, ya que los regresores están correlados con las perturbaciones retardadas ( $E(\epsilon_t' X_{t-1}) \neq 0$  para  $s \geq 2$ ). Esto supone que ciertas propiedades dejan de cumplirse, pero esto no es irremediable ya que:

- Los errores son vectores independientes.
- No hay correlación entre los valores actuales de los errores y los regresores.

$$E(\epsilon_t' X_{t-1}) = 0$$

Estas condiciones son suficientes para aplicar el teorema de Mann-Wald y Cramér de forma que en modelos estocásticos las propiedades de los estimadores mínimo cuadráticos son asintóticamente iguales a las de regresión lineal. En modelos no estacionarios la presencia de raíces unitarias y posible cointegración entre los componentes de  $X$ , no supone una reducción de las propiedades asintóticas de los estimadores obtenidos por mínimos cuadrados. Park y Phillips (1989) y Ahn y Reinsel (1990) muestran que los estimadores obtenidos por mínimos cuadrados tienen las mismas propiedades asintóticas que el estimador máximo verosímil con restricciones de cointegración.

Otra cuestión puede plantearse en la situación de usar mínimos cuadrados para cada ecuación del sistema, o mínimos cuadrados generalizados para toda la ecuación. Estos dos métodos son equivalentes en regresión lineal cuando (Harvey, 1981):

- No existe correlación entre los términos de error contemporáneos, es decir la matriz  $\mathbf{G}$  es diagonal.
- La serie de regresores es la misma en todas las ecuaciones.

En los modelos VAR la matriz  $\mathbf{G}$  no es diagonal, pero todas las ecuaciones incluyen los mismos regresores, por lo tanto, bajo estas condiciones el estimador obtenido por mínimos cuadrados para cada ecuación y el obtenido por mínimos cuadrados generalizados para el conjunto de ecuaciones dan los mismos resultados<sup>59</sup>.

Para llevar a cabo la estimación del modelo<sup>60</sup> vamos a utilizar la notación simplificada del modelo que viene dada por:

$$\mathbf{X} = \mathbf{B} \mathbf{Z} + \mathbf{U} \quad (5.20)$$

donde  $\mathbf{Z}$  es una matriz formada por  $(\mathbf{Z}_0, \mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_{n-1})$  de orden  $((kp+1) \times n)$  donde cada valor  $\mathbf{Z}_t$  se determina como:

$$\mathbf{Z}_t = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{x}_t \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{t-p+1} \end{bmatrix}$$

matriz de orden  $((kp+1) \times 1)$ ,  $\mathbf{B}$  es una matriz formada por  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p)$  de orden  $(k \times (kp+1))$  y  $\mathbf{U}$  es una matriz formada por  $(u_1, \dots, u_n)$  de orden  $(k \times n)$ .

En esta ecuación desconocemos el valor de  $\mathbf{B}$  y la matriz de varianzas y covarianzas de las innovaciones ( $\mathbf{G}_u$ ) que vamos a estimar usando para ello mínimos

---

<sup>59</sup> Una posible alternativa consiste en utilizar la técnica denominada SURE (Seemingly unrelated regression) para estimar las ecuaciones de forma simultánea, pero como cada regresión contiene las mismas variables, la estimación MCO de cada ecuación por separado suministra estimaciones idénticas y eficientes.

<sup>60</sup> Para poder llevar a cabo esta estimación en la práctica es necesario que el número de observaciones que tenemos sea mayor que el producto del número de variables que utilizamos por el número de retardos a incluir más uno ( $n \gg kp+1$ ).

cuadrados múltiples<sup>61</sup>. El estimador obtenido por mínimos cuadrados múltiples para la matriz de parámetros del modelo es:

$$\hat{\beta} = ((Z Z')^{-1} \otimes \Sigma_u) (Z \otimes \Sigma_u^{-1}) x = (Z Z')^{-1} Z \otimes I_k x \quad (5.21)$$

donde  $\otimes$  es el producto de matrices de Kronecker,  $\mathbf{G}_u$  es la matriz de varianzas y covarianzas de las perturbaciones aleatorias,  $x$  es una matriz formada por una columna de orden  $(Kn \times 1)$  resultante de la agregación en una columna de las filas de  $X=(x_1, \dots, x_n)$  e  $I_k$  es una matriz identidad de orden  $k \times k$ .

Este estimador es idéntico al obtenido por mínimos cuadrados ordinarios aplicados sobre cada una de las  $k$  ecuaciones que forman el sistema. Este estimador presenta consistencia y sigue de forma asintótica una distribución normal. Además, nos va a permitir obtener coeficientes bastante precisos, incluso en muestras de menos de 30 observaciones. Esta propiedad es interesante en control estadístico de la calidad, ya que las muestras que se usan de forma habitual no van a tener un gran número de observaciones.

Para estimar la matriz de varianzas y covarianzas de las innovaciones del modelo, de especial interés en control estadístico de la calidad, vamos a recurrir a la siguiente expresión:

$$\hat{\Sigma}_u = \frac{1}{n - kp - 1} (X X' - X Z (Z Z')^{-1} Z X') \quad (5.22)$$

Un método alternativo a los mínimos cuadrados para la estimación de los parámetros del proceso puede ser el de máxima verosimilitud. Para poder aplicar este método de estimación es necesario conocer la distribución del proceso, en este caso supondremos que el proceso es gaussiano. De esta forma, siguiendo el desarrollo recogido en el apéndice A, podemos obtener el estimador de  $\beta$  de la forma:

---

<sup>61</sup> Para analizar de una forma detallada la obtención de estos estimadores, a partir de la representación compacta del modelo VAR(p), se puede consultar el apéndice A o Lütkepohl (1993).

$$\tilde{\beta} = ((Z'Z)^{-1} Z' \otimes I_p) x \quad (5.23)$$

Como se puede observar la estimación de  $\beta$  por máxima verosimilitud coincide con la obtenida por mínimos cuadrados. Además, la estimación de la matriz de covarianzas de los residuos se obtiene como:

$$\tilde{\Sigma}_u = \frac{1}{n} (X - \tilde{B}Z)(X - \tilde{B}Z)' \quad (5.24)$$

donde  $\tilde{B}$  es la matriz de coeficientes correspondiente a  $\tilde{\beta}$ , es decir,  $\tilde{\beta} = \text{vec}(\tilde{B})$ . También, se puede extraer una relación entre el estimador de la matriz de covarianzas de los residuos obtenidos por mínimos cuadrados y el obtenido mediante máxima verosimilitud de la forma:

$$\hat{\Sigma}_u = \frac{1}{n - kp - 1} \tilde{\Sigma}_u \quad (5.25)$$

Por lo tanto, el estimador de la matriz de covarianzas de los residuos obtenido por máxima verosimilitud y el obtenido por mínimos cuadrados son asintóticamente equivalentes. Aunque, el estimador obtenido por máxima verosimilitud es más usado, sobretodo para determinar el número de retardos a incluir en el modelo mediante los criterios de información que recogeremos posteriormente.

Una cuestión importante es determinar el número de retardos (valor de  $p$ ) que vamos a utilizar en el modelo, para esta selección hay que tener en cuenta que si incluimos muchos retardos se va a producir un gran consumo de grados de libertad y además es posible que aparezca el problema de multicolinealidad. Por contra, si se seleccionan pocos retardos es posible que se produzcan errores de especificación, de ahí que la selección de la longitud de retardos a incluir en el modelo sea un aspecto importante.

La especificación de la longitud de retardo de un modelo VAR se puede abordar mediante contrastes de hipótesis, criterios de información o la identificación de pautas de comportamiento en determinados estadísticos



muestrales. Los contrastes de hipótesis giran en torno al uso secuencial del estadístico de la razón de verosimilitudes:

$$\mathfrak{R}(p) = -(n - 0.5 - kp) \ln \left( \frac{\tilde{\Sigma}_u(p)}{\tilde{\Sigma}_u(p-1)} \right)$$

Dicho contraste compara el ajuste muestral de un VAR(p) con un VAR(p-1) y permite decidir si la hipótesis nula  $\mathbf{M}_\beta=0$  no es rechazada por la muestra. Bajo dicha hipótesis el estadístico  $\mathcal{U}$  se distribuye como una  $\mathbf{P}^2$  con  $k^2$  grados de libertad. El principal problema de este contraste radica en el deterioro de los niveles de significación cuando es usado de forma secuencial.

Entre los criterios de información que se pueden utilizar cabe destacar el criterio de Akaike y el de Schwarz. Estos criterios de información se denominan Akaike Information Criterion (AIC) y Bayesian Information Criterion (BIC) respectivamente<sup>62</sup>. La esencia de estos criterios es sencilla, el valor  $p$  es seleccionado si la reducción de la función de pérdida del sistema (error cuadrático medio) debido a la agregación de un retardo más, es menor que el incremento en la función de pérdida ocasionada por la incertidumbre introducida (necesidad de estimar más parámetros). Todos estos criterios seleccionan el valor de  $p$  que conjuntamente mejor explica todas las variables del sistema. Los distintos criterios difieren en la forma en que los dos efectos (matriz de varianzas y covarianzas de los errores de predicción un paso adelante y una ponderación aplicada sobre el número de parámetros necesarios en el modelo) son ponderados. Las expresiones de los criterios AIC y BIC son:

$$\begin{aligned} AIC(p) &= \frac{2}{n} p k^2 + \ln(|\tilde{\Sigma}_u|) \\ BIC(p) &= \frac{\ln(n)}{n} p k^2 + \ln(|\tilde{\Sigma}_u|) \end{aligned} \tag{5.26}$$

---

<sup>62</sup> La derivación analítica de estos criterios puede verse en Choi (1992) o Tsay (2000).

Como se puede observar estos criterios son similares y la diferencia aparece en la distinta forma de ponderar los parámetros que aparecen en el modelo. Las propiedades asintóticas de estos criterios están bien establecidas, pero para pequeñas muestras se considera en general que su comportamiento difiere significativamente dependiendo de la verdadera estructura de retardos del proceso generador del sistema y del tamaño muestral. Los dos métodos analizados son muy similares en su comportamiento, si bien, la ventaja del BIC respecto al AIC radica en su consistencia bajo la hipótesis de que existe un verdadero proceso generador de los datos, aunque su rendimiento en las muestras que vamos a manejar en control de calidad (muestras finitas) no es necesariamente superior al AIC. En general cuanto menor sea el valor del Akaike Information Criterion o Bayesian Information Criterion, mejor va a ser el comportamiento del modelo. La principal ventaja en el uso de estos criterios radica en el mayor automatismo y objetividad incluida en los mismos, mientras que puede aparecer algún problema de especificaciones prolijas en algunos contextos.

Otras posibilidades a la hora de determinar el número de retardos a incluir pueden basarse en el análisis de la matrices de correlaciones cruzadas y parciales, el análisis de correlaciones canónicas, que presenta un comportamiento bastante bueno y tiene una buena interpretación de los resultados, y en general la identificación de pautas de comportamiento en diversos estadísticos. Este enfoque encaja bien con la metodología Box-Jenkins.

#### **5.4.2. MODELOS BVAR**

Los modelos VAR van a presentar, en numerosas ocasiones, problemas de sobreparametrización ya que, incluso en sistemas de dimensión moderada el número de parámetros que han de ser estimados es muy elevado. Este gran número de parámetros a estimar va a producir un agotamiento en los grados de libertad de las estimaciones que se puede traducir en un aumento de la incertidumbre, y un

aumento de las falsas alarmas marcadas por el gráfico de control. Este hecho, junto con la elevada correlación que suelen presentar los regresores de un VAR da lugar a dos consecuencias funestas a la hora de establecer el modelo VAR: multicolinealidad y sobreajuste. Con el fin de resolver estos problemas se han propuesto diversas soluciones consistentes en la imposición de restricciones probabilísticas orientadas a mejorar la calidad de la estimación y la capacidad predictiva del modelo. Estas restricciones pueden ser de naturaleza lineal, restricciones en los parámetros no lineales y restricciones susceptibles de una interpretación bayesiana. En las restricciones bayesianas se intenta reducir la importancia de la información muestral mediante la especificación de una distribución a priori para los parámetros.

En este trabajo vamos a analizar los modelos BVAR (especificación bayesiana de los vectores autorregresivos). Estos modelos fueron desarrollados, en los trabajos pioneros de Sims (1980) y Litterman (1984). La solución que emplean los modelos BVAR mediante la incorporación de información a priori acerca de los parámetros del modelo es una aplicación especial y bastante sofisticada de los métodos de estimación conocidos como regresión cresta (ridge regression) y estimación mixta<sup>63</sup>. Ambos métodos se usan para mejorar la calidad de las estimaciones mínimo cuadráticas, concretamente la regresión cresta trata de incrementar la precisión de los estimadores mientras que la estimación mixta permite la inclusión de información a priori en el proceso de estimación.

Para desarrollar esta especificación de una forma más clara vamos a utilizar una notación del modelo distinta a la utilizada hasta ahora, concretamente vamos a expresar el modelo como una ecuación de un modelo lineal general, es decir, expresamos el modelo con la ecuación entera y sin matrices. La forma del modelo es la siguiente:

---

<sup>63</sup> Estos métodos de estimación aparecen recogidos de una forma más detallada en el apéndice A de este trabajo.

$$Z_i = \begin{pmatrix} i_{n-p} & Z_{1(1)} & \cdots & Z_{k(1)} & \cdots & Z_{1(p)} & \cdots & Z_{k(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_i \\ \phi_{1,1,1} \\ \vdots \\ \phi_{i,k,1} \\ \vdots \\ \phi_{i,1,p} \\ \vdots \\ \phi_{i,k,p} \end{pmatrix} + U_i \quad (5.27)$$

donde  $Z_{i(h)}$  es el vector de  $n-p$  observaciones de la serie  $j$  retardada  $h$  períodos e  $i$  es un vector de unos. Todas las ecuaciones tienen el mismo número de regresores, por lo que la ganancia de estimar todos los parámetros a la vez es nula y vamos a optar por considerar cada una de las  $k$  ecuaciones que integran un VAR obteniendo la siguiente expresión:

$$Z = (I_k \otimes x) \beta + U = X \beta + U$$

donde  $x$  y  $\beta$  van a estar definidos como:

$$x = \begin{pmatrix} i_{n-p} & Z_{1(1)} & \cdots & Z_{k(1)} & \cdots & Z_{1(p)} & \cdots & Z_{k(p)} \end{pmatrix}$$

$$\beta = (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_k)'$$

Este vector  $\beta$  va a estar relacionado con las matrices  $\mathbf{M}$  del modelo VAR general según la expresión:  $\beta = \text{vec}(\mathbf{M})$  donde  $\mathbf{M} = (: \mathbf{M}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{M}_k)$ . Por lo tanto, la matriz de varianzas y covarianzas de  $U$  se obtiene como:  $\mathbf{G}_u = \mathbf{G} \otimes \mathbf{I}_{n-p}$  donde  $\mathbf{G} = \{\mathbf{F}_{i,j} \mid i,j = 1 \text{ } \ddot{y} \text{ } k\}$ .

En una aproximación bayesiana es asumido que la información a priori<sup>64</sup> o no muestral está disponible en forma de una función de densidad, en este caso se considera que los parámetros de  $\Phi$  son variables aleatorias caracterizadas por una distribución de probabilidad normal multivariante:

$$\Phi \sim N(\Phi^*, V_\Phi)$$

Una distribución a priori específica fue desarrollada por Litterman (1986) y Doan, Litterman & Sims (1984), denominada como distribución a priori de Minesota o de Litterman para los parámetros que describen el modelo VAR.

Los principios básicos que rigen esta distribución son:

- La dinámica propia es más importante que la cruzada, este principio no es adecuado en control multivariante de la calidad ya que la dinámica cruzada juega un papel importante.
- La influencia disminuye a medida que aumenta la distancia temporal.
- Las series individuales no son estacionarias, aunque en este caso vamos a analizar la transformación para series estacionarias.

El punto de partida del asume que  $Z_{i,t}$  evoluciona como un paseo aleatorio con deriva:

$$Z_{i,t} = \mu_i + Z_{i,t-1} + u_{it} \quad \forall i$$

Es decir, suponemos que todas las series tienen una tendencia mixta con un componente estocástico asociado a la raíz unitaria en la frecuencia cero y otro determinista vinculado al término constante  $\mu_i$ . En ocasiones, se considera  $\mu_i = 0$ , por lo que tenemos un modelo con tendencias estocásticas.

---

<sup>64</sup> Esta información a priori

De esta forma, podemos considerar la media de la distribución de  $\beta$  como:

$$\beta^* = \begin{cases} \mu_i = 0 & \forall i \\ \phi_{i,j,h} = \begin{cases} 1 & i = j \quad h = 1 \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases} \end{cases} \quad (5.28)$$

Por lo que la media va a ser cero para la componente tendencial y va a tomar el valor uno en la ecuación correspondiente a cada variable con retardo unitario.

Por otro lado, la matriz de varianzas y covarianzas de  $\beta$  va a estar formada por dos elementos; por un lado una parte difusa para las constantes del modelo, cuya estimación depende de los valores de la muestra y puede tomar valores arbitrariamente grandes, y por otro lado, para los coeficientes en el retardo  $h$  de la variable  $j$  en la ecuación  $i$  va a ser especificada como una matriz diagonal, ya que se considera que los parámetros son variables aleatorias independientes entre sí, con los elementos de la diagonal determinados como:

$$\text{diagonal}(V_\beta) = \begin{cases} v(\mu_i) = \infty & \forall i \\ v(\phi_{i,j,h}) = (\pi_1 F_{i,j} g_h(\sigma_{ii} / \sigma_{jj}))^2 & \forall i, j \quad \forall h \end{cases} \quad (5.29)$$

Esta varianza a priori es parametrizada incidiendo en las tres dimensiones esenciales de un modelo VAR: la dinámica propia de primer orden ( $\mathbf{B}_1$ ), la dinámica general ( $g_h$ ) y la dinámica cruzada ( $F_{i,j}$ ).

El hiperparámetro  $\mathbf{B}_1$  mide el grado de confianza que el analista tiene en la distribución a priori de la media. Este parámetro va a tomar valores comprendidos entre cero e infinito. Así, si toma el valor cero va a otorgar mayor confianza en el comportamiento del modelo como  $k$  paseos aleatorios con deriva posiblemente correlacionados de forma contemporánea, y, por contra, si se aproxima a infinito va a suponer que se adopte un comportamiento a priori difuso sobre el parámetro, por lo que su determinación se va a basar sólo en la información muestral como si

se tratara de un modelo VAR no restringido. En la mayoría de aplicaciones prácticas este parámetro va a tomar valores situados entre 0,1 y 0,3.

La matriz  $F$  especifica, desde un punto de vista extramuestral, la interacción dinámica entre las series del modelo. Esta matriz se asume simétrica y va a tener la forma:

$$F_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ \pi_2 & i \neq j \end{cases}$$

El valor de  $\mathbf{B}_2$  igual que el de  $\mathbf{B}_1$  va a estar situado entre cero e infinito y va a cuantificar el grado de asociación temporal entre las variables del sistema. Si  $\pi_2 \rightarrow 0$  el sistema va a carecer de interacción dinámica entre las  $k$  variables que lo integran y, por lo tanto, van a existir interacciones débiles entre las variables, por contra, si  $\pi_2 \rightarrow \infty$  no se asume nada sobre estas interacciones, dejando que sea la información muestral la que determine su naturaleza. Un rango de valores para  $\mathbf{B}_2$  que se comporta bien en el desarrollo de este tipo de modelos incluye valores comprendidos entre 0,1 y 0,2.

La función  $g_h$  mide el grado de reducción de la varianza en función del retardo. Esta función es seleccionada normalmente para tener un descenso geométrico de la forma  $g_h = 1/h$ . Esta función se puede expresar también mediante un decaimiento armónico o geométrico de la siguiente forma (la más usada es la primera función que recoge un decaimiento armónico, en este caso el valor de  $\mathbf{B}_3$  suele oscilar entre 1,1 y 1,5):

$$g_h = \begin{cases} h^{-\pi_3} & 0 \leq \pi_3 \leq \infty \\ \pi_3^h & 0 \leq \pi_3 \leq 1 \end{cases}$$

Finalmente el valor de  $\mathbf{F}_{ii}/\mathbf{F}_{jj}$  refleja un factor de escala que hay que tener en cuenta sobre todo si las variables que forman el modelo están expresadas en distintas unidades de medida. Estas varianzas se pueden determinar a través de  $k$  estimaciones AR univariantes o de una estimación VAR no restringida.

Un aspecto importante en la utilización de estos modelos BVAR radica en la determinación de los hiperparámetros ( $\mathbf{B}$ ) a utilizar. El procedimiento para determinar el valor de estos hiperparámetros se denomina calibrado y puede realizarse mediante consideraciones exclusivamente a priori y/o bien basarse en la optimización de una determinada función.

La crítica que reciben estos modelos por la justificación del valor de estos hiperparámetros mediante consideraciones a priori se mitiga en control de la calidad por el conocimiento del proceso de producción por parte de los responsables del control de la calidad, de esta forma va a resultar relativamente sencillo establecer el comportamiento de estos hiperparámetros.

Todd (1988) propone el procedimiento de búsqueda axial, consistente en fijar el valor de todos los elementos  $\mathbf{B}$  menos uno ( $\mathbf{B}_j$ ), variar sólo éste y evaluar la función objetivo en un rango prefijado de valores para ese parámetro. Una vez desarrollado este proceso seleccionamos el valor de  $\mathbf{B}_j$  que maximiza la función objetivo  $F(\mathbf{\$B})$ , tras fijar el valor de este parámetro desarrollamos un procedimiento similar para los demás parámetros  $\mathbf{B}$  hasta que la modificación de los valores de estos parámetros no suponga ninguna ganancia en términos de maximizar la función  $F(\mathbf{\$B})$ .

La elección de la función  $F(\mathbf{\$B})$  depende del objetivo del modelo y de las características de los datos, si bien, desde un punto de vista teórico un candidato de función puede ser la función de verosimilitud dada como:

$$l(\beta | Z) = -(kn/2) \ln(2\pi) - (1/2) \ln |\Sigma \otimes I_n| - \\ - (1/2) (Z - (I_k \otimes x) \beta)' (\Sigma^{-1} \otimes I_n) (Z - (I_k \otimes x) \beta)$$



Por lo tanto, una vez determinado el valor de los hiperparámetros tenemos un conjunto de restricciones estocásticas que se aplican al vector de coeficientes  $\beta$ , de la forma:

$$r = R \beta + w \quad (5.30)$$

donde  $r$  viene determinado por  $\beta^*$  (ecuación 5.28),  $R$  es una matriz identidad de dimensión  $k(kp+1)$  y  $w$  es una perturbación de media nula y matriz de varianzas y covarianzas determinada por  $V_\beta$  (ecuación 5.29). Aplicando el método de estimación mixta, analizado en el apéndice A, se obtiene el estimador de la media y matriz de varianzas y covarianzas de  $\beta$  a posteriori como:

$$\hat{\beta} = (((x'x) \otimes \Sigma^{-1}) + V_\beta^{-1})^{-1}((x' \otimes \Sigma^{-1})Z + V_\beta^{-1} \beta^*)$$

$$V_{\hat{\beta}} = (((x'x) \otimes \Sigma^{-1}) + V_\beta^{-1})^{-1}$$

Estas dos ecuaciones definen la distribución a posteriori de  $\beta$  en un contexto gaussiano con una distribución a priori normal multivariante, como se puede observar el estimador es una media ponderada del estimador obtenido por mínimos cuadrados y de la distribución a priori, dependiendo de las ponderaciones de las respectivas matrices de varianzas y covarianzas.

Los modelos VARMA, que no analizaremos en este trabajo, pueden considerarse una forma alternativa de restringir la tendencia sobreparametrizadora de los VAR. En lugar de imponer restricciones bayesianas, los modelos VARMA expanden el espacio de medida incorporando las innovaciones de períodos anteriores. Esta inclusión supone la imposición de una serie de restricciones no lineales sobre la representación VAR(p).

Estos desarrollos llevados a cabo para mejorar el comportamiento de los modelos VAR en el tratamiento de series temporales múltiples presentan aún inconvenientes y dificultades<sup>65</sup>, por lo que se hace necesario encontrar otras

---

<sup>65</sup> Entre los principales inconvenientes en su aplicación nos encontramos la falta de desarrollo de un herramental informático suficiente para llevar a cabo el calibrado y estimación de este tipo de modelos.

herramientas para su análisis. En este sentido una herramienta destacada ha sido la representación de modelos en espacio de los estados, sobre esta representación incidiremos en especial en este trabajo.

### 5.4.3. CONTROL DE LA CALIDAD EN PROCESOS MULTIVARIANTES AUTOCORRELACIONADOS

Si nos decantamos por utilizar una modelización VAR, o su desarrollo bayesiano BVAR, tendremos que llevar a cabo un ajuste de uno de estos modelos a la información disponible. Con este modelo ajustado podemos obtener unos residuos con los que llevar a cabo el control de calidad. Los residuos obtenidos tras el ajuste de un modelo VAR van a estar incorrelados a lo largo del tiempo pero correlacionados de forma cruzada, es decir,  $E(U_t, U_t') = \mathbf{G}_u$ . Además, si el proceso se encuentra bajo control y el modelo está bien especificado y estimado, los residuos ( $U_t$ ) deben ser asintóticamente normales con media cero y varianza  $\mathbf{G}_u$ .

Por lo tanto, el gráfico  $T^2$  Hotelling tradicional puede ser aplicado a estos residuos estimados. Para ello va a ser necesario estimar los parámetros (media y matriz de varianzas y covarianzas de los residuos). El valor medio de la estimación de los residuos puede ser sustituido por su valor asintótico, cero, y la matriz de varianzas y covarianzas puede estimarse como:

$$\hat{\Sigma}_u = \frac{1}{m - kp - 1} (XX' - XZ'(ZZ')^{-1}ZX')$$

De esta forma, el valor del estadístico  $T^2$  para la observación  $i$ -ésima va a tomar la forma:

$$T_{u_i}^2 = U_i' \hat{\Sigma}_u^{-1} U_i \quad (5.31)$$

Este valor se representa gráficamente junto al límite de control correspondiente, obtenido como:

$$LSC(T_{u_t}^2) = \frac{(m-1)^2}{m} \beta_{\alpha, p/2, (m-p-1)/2} \quad (5.32)$$

que difiere del obtenido para las series originales sólo en el número de observaciones, ya que la modelización VAR(p) prescinde de los primeros  $p$  valores.

Este planteamiento consigue paliar el efecto pernicioso de la correlación serial. Además, el hecho de que los residuos presenten correlación coetánea,  $E(U_t, U_t') = \mathbf{G}_u$ , permite que se transmita a éstos parte de la estructura de dependencia existente entre las variables originales, lo que justifica la elección de un planteamiento múltiple frente al filtrado independiente de cada serie.

Sin embargo, si la correlación cruzada original no es fuerte, el proceso de filtrado podría modificar las relaciones más débiles. En estos casos, resulta interesante disponer de resultados comparativos sobre el comportamiento del ARL entre los gráficos obtenidos a partir de los resultados originales y a partir de los residuos, así como de una comparación de la estructura de las matrices de varianzas-covarianzas de ambos procesos<sup>66</sup>.

Por otro lado, este trabajo no pretende centrarse únicamente en la eliminación de la autocorrelación producida, fundamentalmente, por deficiencias en la obtención de la muestra. Debido a que, esta autocorrelación puede ser reflejo también de la existencia de algún “factor latente” o “inercia” del proceso. En este caso, el análisis de los residuos pondrá de manifiesto el comportamiento “filtrado” del proceso, es decir, el comportamiento de la parte no previsible o innovacional, que suele ser el interés principal en un control estadístico de calidad, sin

---

<sup>66</sup> Aunque el desarrollo completo de estos dos aspectos excede el planteamiento de este trabajo, el primero puede abordarse mediante la obtención de los respectivos ARL usando modelos markovianos, mientras que el segundo puede abordarse mediante el estudio de la diferencia, en norma, entre las matrices de varianzas-covarianzas.

profundizar en el análisis del “factor inercial”. Pero éste puede tener también interés para el analista: la acumulación de pequeños cambios en las condiciones del proceso o la existencia de una tendencia suave, que no serán recogidos en el gráfico propuesto. En el primer caso, por las características del gráfico  $T^2$ , aunque sería posible abordar su detección mediante el uso de gráficos MEWMA o MCUSUM sobre los residuos. En el segundo caso, porque la tendencia quedaría recogida en el modelo VAR. Aquí podría tener sentido la estimación eficiente del “factor inercial” y la construcción de un gráfico de control sobre él, cuestión que va a ser abordada con la utilización de una modelización en espacio de los estados.



## **CAPÍTULO 6**

### **UN NUEVO MÉTODO DE CONTROL PARA PROCESOS MULTIVARIANTES AUTOCORRELACIONADOS**

#### **6.1. INTRODUCCIÓN**

En la mayoría de los procesos de producción, la calidad está asociada a varias características simultáneamente. Además, en muchos casos, esta información va a presentar un comportamiento autocorrelacionado, que puede deberse a la propia naturaleza del proceso o estar inducido en la muestra por los mecanismos de obtención de la información.

En esta situación, como se recoge en el capítulo anterior, los planteamientos clásicos existentes presentan algunas debilidades asociadas, tanto a la estrategia de modelización adoptada<sup>67</sup> como con las características técnicas de la metodología o

---

<sup>67</sup> Como podría ser la pérdida de la estructura de correlación con el filtrado independiente de cada serie.

el uso que se hace de la información. El enfoque generalizado, consistente en la modelización VAR o, menos frecuentemente, en su versión bayesiana (BVAR), y la posterior construcción de gráficos de control sobre los residuos<sup>68</sup> presenta algunos problemas. Por un lado, en aspectos estadísticos técnicos, cabría destacar la cantidad de parámetros que es necesario estimar, que requiere una gran cantidad de información muestral para garantizar un buen comportamiento estadístico con el consiguiente aumento del coste económico; o las dificultades numéricas asociadas a los algoritmos utilizados en la estimación<sup>69</sup>, que inciden en las propiedades finales. Por otro lado, dentro de la aplicación de la metodología al control de la calidad, el enfoque multivariante se ha centrado exclusivamente en la obtención de los residuos del modelo y la construcción de gráficos de control sobre ellos. Así, el enfoque univariante propuesto en Alwan y Roberts (1988) para analizar también la dinámica general del proceso, no se ha extrapolado al caso multivariante, perdiendo: la información contenida en dicha dinámica y la visión global del proceso.

Por ello, puede resultar útil el desarrollo de una metodología alternativa que solucione o palie estas deficiencias. Ésta nos va a permitir filtrar la información obteniendo dos elementos que utilizaremos para desarrollar sendos gráficos de control: las innovaciones y los estados. Las primeras van a tener el mismo papel que los residuos en la modelización VAR, de forma que un gráfico de control desarrollado sobre estas innovaciones nos va a permitir detectar variaciones esporádicas en el comportamiento del proceso. Por otro lado, obtendremos una representación parsimoniosa de éste, que recoge en las variables de estado la dinámica general del proceso<sup>70</sup> y nos van a permitir desarrollar un gráfico para controlar variaciones con una mayor persistencia temporal. Además, la utilización de la descomposición en valores singulares utilizada en la fase de estimación

---

<sup>68</sup> Libres éstos de autocorrelación si el proceso está correctamente especificado

<sup>69</sup> Especialmente en un planteamiento máximo-verosímil.

<sup>70</sup> Constituyen, así, estadísticos suficientes y, con el algoritmo de estimación propuesto en este trabajo, minimales.

presenta mayor estabilidad numérica que los habituales métodos basados en determinantes (Golub y Van Loan, 1983). Por ello, ante un tamaño muestral moderado, los resultados estadísticos de este enfoque mitigan las deficiencias asociadas a la representación VAR. De esta forma se obtiene un procedimiento similar al desarrollado por Alwan y Roberts (1988) pero en un ámbito multivariante.

En este capítulo vamos a recoger en la sección 2 el desarrollo de la metodología en espacio de los estados, alternativa de desarrollo reciente dentro del tratamiento estadístico de series temporales múltiples cuya aplicación en control estadístico de la calidad es escasa<sup>71</sup>. En concreto, abordaremos un algoritmo de modelización formalmente equivalente al enfoque VAR pero con ventajas estructurales y analíticas que lo hacen atractivo tanto para el tratamiento general de series temporales como en el control estadístico de la calidad. Destacaremos las propiedades de estos modelos, la determinación de la dimensión, las formas de estimar las matrices del sistema y la estimación del vector de estados e innovaciones del modelo.

Por último y como aplicación de esta metodología, en la sección 3 expondremos la construcción de nuevos gráficos de control para procesos autocorrelacionados, resaltando las ventajas que este enfoque aporta sobre el tratamiento clásico recogido en la bibliografía especializada.

---

<sup>71</sup> Hasta el momento, el enfoque en espacio de los estados sólo se ha aplicado para el control ingenieril de procesos.





## 6.2. MODELOS EN ESPACIO DE LOS ESTADOS

La principal diferencia de estos modelos con los modelos ARMA radica en la utilización de las llamadas variables de estado, que están relacionadas linealmente con las variables observadas, y resumen la evolución temporal del proceso. En general, el número de variables de estado presentes en el modelo debe ser inferior al de variables observadas.

Estos modelos son similares a los modelos ARMA, pero presentan diferencias en la fase de identificación<sup>72</sup> del modelo. En esta fase han sido desarrollados algoritmos propios y relativamente desconocidos para determinar el modelo que ha generado los datos. Además, esta metodología es preferible en la modelización de series temporales múltiples al resultar más “parsimoniosa” que los modelos VARMA en el número de parámetros necesarios para recoger la evolución conjunta de las variables.

Una representación en espacio de los estados fue propuesta por Akaike (1975, 1976) mediante un método de correlación canónica, esta representación presenta la desventaja de que puede conducir a representaciones en espacio de los estados no equivalentes cuando se cambia el orden de las variables endógenas. Para evitar este inconveniente, Aoki (1983, 1987) sugiere un método alternativo relacionado con la descomposición en valores singulares de la matriz de autocovarianzas estimadas<sup>73</sup>. Este método propuesto por Aoki será el que utilizaremos para llevar a cabo la estimación de las matrices del sistema. Las matrices de los modelos se obtienen a través de una aproximación de la matriz tipo Hankel anterior por otras

---

<sup>72</sup> En la terminología de Box y Jenkins (1970) esta identificación se centra en la determinación de los órdenes del proceso, mientras que en la teoría de sistemas tiene un significado más amplio, incluyendo también la estimación de las matrices del sistema.

<sup>73</sup> Esta matriz de autocovarianzas es una matriz de tipo Hankel por bloques, esta propiedad va a ser muy interesante en el tratamiento de los modelos en espacio de los estados.

de rango inferior. Posteriormente, Mittnik (1989) propone un método para la obtención de modelos en espacio de los estados para series temporales múltiples, relacionado con el de Aoki, pero que utiliza las matrices de autocorrelación. Este método conserva las propiedades del método anterior y además permite usar inputs como variables exógenas para el sistema. Este método presenta ventajas computacionales cuando se trabaja con procesos autorregresivos. Por último, destacar la propuesta de Bauer y Wagner (2002) consistente en la utilización de una regresión entre los valores futuros y pasados de la serie.

Un sistema lineal discreto en espacio de los estados se puede definir mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= F_t X_t + G_t \varepsilon_t \\ Y_t &= H_t X_t + D_t \varepsilon_t \end{aligned} \quad (6.1)$$

donde  $H_t$ ,  $F_t$ ,  $G_t$ ,  $D_t$  son matrices reales de dimensiones  $(p \times n)^{74}$ ,  $(n \times n)$ ,  $(n \times p)$  y  $(p \times p)$  respectivamente. La primera ecuación del modelo recibe el nombre de ecuación de transición o estado y representa a un modelo markoviano de primer orden, donde la renovación del vector de estados consta de dos componentes: la evolución propia de  $X_t$  resumida en la matriz  $F$ ; y la corrección producida por la innovación a través de la matriz  $G$ . La segunda ecuación recibe el nombre de ecuación de medida u observacional. Además, si el proceso fuese invariante se describiría mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= F X_t + G \varepsilon_t \\ Y_t &= H X_t + D \varepsilon_t \end{aligned}$$

por lo que un sistema lineal, invariante y discreto está caracterizado por el conjunto de matrices  $(H, F, G, D)$ , donde el par  $(F, G)$  controla el comportamiento de la relación entre el input y el estado,  $(H, F)$  el de la relación entre el estado y el output y la matriz  $D$  la relación instantánea entre el input y el output. Esta forma del modelo puede ocasionar que cierta autocorrelación aparezca recogida en la matriz

---

<sup>74</sup> En este caso, es importante matizar que cuando hablamos de  $n$  no hacemos referencia al número de observaciones disponibles, sino al número de estados del sistema.

D y no en el estado, para considerarla en éste es mejor una representación de la forma equivalente:

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= F X_t + G \varepsilon_t \\ Y_t &= H X_t + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (6.2)$$

En este modelo  $\mathbf{g}$  es un proceso innovacional de  $Y$  que no presenta autocorrelación, y  $X_t$  es el vector de estado que actúa como estadístico suficiente para la dinámica del sistema. De esta forma, la mejor predicción del vector de observaciones viene dada por:

$$\hat{Y}_{t+1|t} = \mu + H X_t \quad (6.3)$$

La renovación del vector de estado va a constar de una evolución propia de  $X_t$  resumida en  $F$  y de una corrección producida por la innovación del proceso a través de  $G$ . De esta forma, se resume el comportamiento dinámico en una ecuación en diferencias de primer orden. Esto permite obviar la determinación del número de retardos que presentan una correlación significativa con el valor actual ya que el vector de estado recoge toda la información relevante, por atrasada que sea.

### 6.2.1. PROPIEDADES DE LOS MODELOS EN ESPACIO DE LOS ESTADOS

Dentro de las características que debe cumplir un sistema en espacio de los estados podemos destacar tres: estabilidad, observabilidad y controlabilidad y la función de impulso-respuesta.

En este sentido una propiedad importante va a ser la de estabilidad, ya que cualquier descripción de un sistema para poderla utilizar debe permanecer relativamente válida a lo largo del tiempo. El concepto tradicional de estabilidad está relacionado con el regreso del sistema a una posición de equilibrio tras una pequeña perturbación exterior, sin embargo, dentro de la teoría moderna de

sistemas, la estabilidad se relaciona con un salto controlado en una posición de equilibrio tras una perturbación. En el caso de un sistema lineal, si llamamos  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$  a los autovalores de  $F$  se puede hablar de un proceso:

- Estable en sentido de Lyapunov, si y sólo si  $|\mathbf{g}_i| \neq 1$  para  $i=1, 2, \dots, n$  y para cualquier autovalor  $\mathbf{g}_i$ , tal que  $|\mathbf{g}_i|=1$  con multiplicidad  $m$ , le corresponden exactamente  $m$  autovectores independientes.

- Asintóticamente estable, si y sólo si se verifica que  $|\mathbf{g}_i| < 1$  para  $i=1, 2, \dots, n$ .

- Externamente estable, si  $\sum_{i=0}^{\infty} \|Z_i\| < \infty$  donde  $Z_i = HF^{i-1}G$  que coincide con la

función de impulso respuesta del sistema.

Cuando hablamos de observabilidad y controlabilidad de un sistema lineal invariante, estas propiedades se pueden caracterizar como:

- Sistema controlable, si y sólo si  $\text{rg}(G, FG, \dots, F^{n-1}G) = n$ . En este caso, el par  $(F, G)$  es controlable.

- Sistema observable, si y sólo si  $\text{rg}(H^t, F^t H^t, \dots, (F^t)^{n-1} H^t) = n$ . En este caso, el par  $(F, H)$  es observable.

Estas características son ideales en cualquier sistema, ya que garantizan que cualquier valor del estado es necesario para modelizar la relación input-output del sistema. Además, estas propiedades garantizan la minimalidad de la representación, es decir, no se puede encontrar otra modelización de dimensión inferior que resuma la relación input-output del sistema.

Por último, otro aspecto importante es lo que se conoce como *función de impulso-respuesta*. Esta función se puede analizar desde dos puntos de vista

distintos: la respuesta del sistema para un estado inicial  $X=0$  en  $t=0$  (respuesta para estado nulo); y la respuesta para un estado inicial cualquiera con un input inicial  $u=0$  (respuesta para input nulo). En el primer caso, que es el de mayor interés práctico, la función de impulso-respuesta tiene la forma:

$$Z_0 = D \quad Z_k = H F^{k-1} G \quad \text{para } k \in \mathbb{Z} \quad (6.4)$$

Esta función de impulso respuesta nos permite analizar el comportamiento del proceso ante un shock en una variable, este comportamiento se puede analizar viendo la evolución temporal de ese shock o mediante el análisis del efecto que, sobre el resto de variables, tiene la presencia de un shock en una de ellas.

Estas propiedades van a tener una gran utilidad en la aplicación de estos modelos en el tratamiento de las observaciones, previo al desarrollo del control estadístico de la calidad del proceso. En este sentido, la estabilidad del sistema en espacio de los estados nos va a asegurar el regreso del sistema a una situación de equilibrio después de la aparición de una observación fuera de control, las propiedades de observabilidad y controlabilidad nos van a asegurar que todos los valores del estado involucrados van a ser necesarios para recoger el comportamiento del sistema de una forma adecuada. Por último, la función de impulso-respuesta nos permite analizar el comportamiento del proceso ante un cambio en una de las variables que intervienen en el análisis, así como, analizar el efecto que un cambio en una variable tiene sobre el resto de variables que afectan a la calidad del producto.

Cuando se establece un modelo en espacio de los estados se suele llevar a cabo distintas etapas en la fijación del mismo, lo primero que hay que hacer es determinar la dimensión del sistema necesaria para recoger el comportamiento del modelo fijado, después se lleva a cabo la estimación de las matrices de parámetros, y por último la estimación del vector de estado. Estas etapas van a ser analizadas a continuación.

### 6.2.2. DETERMINACIÓN DE LA DIMENSIÓN DEL SISTEMA EN ESPACIO DE LOS ESTADOS

La etapa de determinación de la dimensión del sistema es más amplia en los algoritmos desarrollados en teoría de sistemas, ya que los modelos comunes en economía son estructurales y suponen que es conocida la estructura dinámica del proceso. Para determinar la dimensión del sistema se han desarrollado distintos algoritmos (basados en coeficientes de correlación canónica procedentes del campo de modelos estáticos) y criterios de información.

Para analizar estos algoritmos, consideramos los vectores de valores futuros y pasados de la serie:

$$Y_t^+ = (Y_t', Y_{t+1}', Y_{t+2}', \dots)'$$

$$Y_{t-1}^- = (Y_{t-1}', Y_{t-2}', Y_{t-3}', \dots)'$$

además  $R_+$  y  $R_-$  van a ser las correspondientes matrices de correlación.

Siguiendo a Bauer y Wagner (2002) se puede encontrar una relación entre los valores anteriores de la forma:

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ Y_{t+1} \\ Y_{t+2} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} HG & H\bar{F}G & \dots & H\bar{F}^{t-1}G \\ HFG & HF\bar{F}G & \dots & HF\bar{F}^{t-1}G \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ HF^jG & HF^j\bar{F}G & \dots & HF^j\bar{F}^{t-1}G \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{t-1} \\ Y_{t-2} \\ Y_{t-3} \\ \vdots \end{pmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{pmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^j \\ \vdots \end{pmatrix} \bar{F}^t x_0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ HG & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ HF^{j-1}G & HF^{j-2}G & \dots & HG & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_t \\ \epsilon_{t+1} \\ \epsilon_{t+2} \\ \vdots \end{pmatrix} = \\
& = \beta \begin{pmatrix} Y_{t-1} \\ Y_{t-2} \\ Y_{t-3} \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^j \\ \vdots \end{pmatrix} \bar{F}^t x_0 + \xi \begin{pmatrix} \epsilon_t \\ \epsilon_{t+1} \\ \epsilon_{t+2} \\ \vdots \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donde  $\bar{F}^t = (F - GH)^t$  y  $x_0$  es el valor inicial del estado<sup>75</sup>. La ecuación anterior describe el comportamiento futuro del proceso como una suma de tres componentes: el primer término recoge el pasado del proceso; el segundo término recoge el efecto del valor inicial del estado  $x_0$ ; y el tercero muestra el efecto de los ruidos futuros del proceso. Este último término es ortogonal a los otros dos y el último término desaparece cuando  $t \rightarrow \infty$  debido a la suposición de que la matriz  $\bar{F}^t$  converge a cero.

La matriz  $\beta$  conecta los valores pasados con los valores futuros utilizando la información estructural del sistema, de tal forma que contiene la información relevante de las matrices del sistema (F, G, H). La idea del algoritmo propuesto por Bauer y Wagner (2002) es utilizar esta información para obtener estimaciones de las matrices del sistema.

---

<sup>75</sup> Si  $x_0$  es desconocido hay que estimarlo mediante el filtro de Kalman.



Para llevar a cabo la estimación sólo disponemos de una serie de observaciones finita, por lo que la ecuación anterior la vamos a utilizar de forma truncada. Por lo tanto, vamos a seleccionar dos índices  $N_f$  y  $N_p$  para definir los vectores truncados de observaciones futuras y pasadas como:

$$Y_{t,N_f}^+ = (Y_t', Y_{t+1}', \dots, Y_{t+N_f-1}')'$$

$$Y_{t-1,N_p}^- = (Y_{t-1}', Y_{t-2}', \dots, Y_{t-N_p}')'$$

y

$$E_{t,N_f}^+ = (\epsilon_t', \epsilon_{t+1}', \dots, \epsilon_{t+N_f-1}')'$$

Además vamos a considerar:

$$O_f = [H', F'H', \dots, (F^{N_f-1})'H']'$$

$$K_p = [G, (F - GH)G, \dots, (F - GH)^{N_p-1}G]$$

y una matriz  $\mathbf{Z}_f$  con una primera fila formada por ceros y el siguiente bloque de filas formado por  $[H' F^{i-2} G, 0, H' G, 0, 0]$  para  $i \geq 2$ . De esta forma y utilizando los vectores de valores pasados y futuros truncados podemos definir la ecuación truncada de forma compacta como:

$$Y_{t,N_f}^+ = O_f K_p Y_{t-1,N_p}^- + O_f (F - GH)^{N_p} x_{t-N_p} + \xi_f E_{t,N_f}^+$$

La anterior ecuación permite desarrollar el siguiente procedimiento:

1. En el primer paso calcular la regresión de  $Y_{t,N_f}^+$  sobre  $Y_{t-1,N_p}^-$  para obtener una estimación  $\hat{\beta}_{N_f,N_p}$  de  $O_f K_p$ .

2. Normalmente  $\hat{\beta}_{N_f,N_p}$  es de rango completo, mientras  $O_f K_p$  es de rango  $n$  para  $N_p, N_f \geq n$ , donde  $n$  denota el verdadero orden del sistema, y  $N_p$  y  $N_f$  son los valores de truncamiento seleccionados. Así, aproximamos  $\hat{\beta}_{N_f,N_p}$  por una matriz de rango  $n$  mediante la descomposición de  $\hat{O}_f \hat{K}_p$ .

3. Usar la estimación de  $\hat{K}_p$  para estimar el estado como  $\hat{x}_t = \hat{K}_p Y_{t-1, N_p}^-$ . Una vez estimado el estado, las ecuaciones del sistema pueden ser usadas para obtener estimaciones de las matrices del sistema (F, G, H) por mínimos cuadrados ordinarios. Primero establecemos la regresión de  $y_t$  en  $\hat{x}_t$  para obtener una estimación  $\hat{H}$  y unos residuos  $\hat{\epsilon}_t$ . Entonces  $\hat{\Psi} = E[\hat{\epsilon}_t \hat{\epsilon}_t']$  es una estimación de la varianza de las innovaciones. Y por último, establecemos la regresión de  $\hat{x}_{t+1}$  en  $\hat{x}_t$  y  $\hat{\epsilon}_t$  para obtener las estimaciones  $\hat{F}$  y  $\hat{G}$ .

Hay que tener en cuenta que la aproximación desarrollada en el segundo paso no nos permite obtener la estimación de  $\hat{\beta}_{N_f, N_p}$  directamente, sino una matriz ponderada  $\hat{W}_f^+ \hat{\beta}_{N_f, N_p} \hat{W}_p^-$ . Si llevamos a cabo la descomposición en valores singulares de esta matriz vamos a tener que  $\hat{W}_f^+ \hat{\beta}_{N_f, N_p} \hat{W}_p^- = \hat{U} \hat{\Sigma}_1 \hat{V}'$  donde  $\hat{\Sigma}_1$ <sup>76</sup> es una matriz diagonal que contiene los valores singulares ordenados de forma decreciente y  $\hat{U}'\hat{U}$  y  $\hat{V}'\hat{V}$  son matrices identidad. Para un sistema de orden n vamos a tener exactamente n valores singulares mayores que cero, el resto de valores singulares van a converger a cero.

El orden de estimación en el trabajo de Bauer (1998) va a estar basado en la consideración del tamaño del primer valor singular rechazado,  $\hat{\sigma}_{n+1}$ , explotando el comportamiento asintótico de las estimaciones, se va a definir el siguiente criterio:

$$SVC(\hat{n}) = \hat{\sigma}_{\hat{n}+1}^2 + 2\hat{n}p \frac{H_T}{T}$$

donde  $H_T > 0$ ,  $H_T/T \rightarrow 0$  denota una cota<sup>77</sup> que determina las propiedades asintóticas del orden del sistema estimado. El número de parámetros en un modelo de

---

<sup>76</sup> Hemos utilizado la notación  $\hat{\Sigma}_1$  para diferenciar esta matriz de valores singulares de la obtenida mediante la descomposición de la matriz de Hankel ( $\hat{\Sigma}$ ) que vamos a analizar posteriormente y que constituye el elemento fundamental que vamos a utilizar en la determinación de la dimensión del sistema en espacio de los estados.

<sup>77</sup> En Bauer y Wagner (2002) se propone utilizar un valor para la cota  $H_T = \log(T)$ .

dimensión  $n$  es igual a  $2np$ . El orden del sistema estimado,  $\hat{n}$ , es considerado como aquel valor que hace mínimo el criterio  $SVC(n)$ .

Otra alternativa viable consistiría en definir  $\Gamma_R$  como  $E[Y_{t+R} Y_t']$  para  $R=0, 1, 2, \dots$  podemos obtener:

$$\mathcal{H} = E[Y_t^+ Y_{t-1}^-] = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 & \dots \\ \Gamma_2 & \Gamma_3 & \Gamma_4 & \dots \\ \Gamma_3 & \Gamma_4 & \Gamma_5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Esta matriz es una matriz de autocorrelación tipo Hankel<sup>78</sup> por bloques, es decir, los elementos de las contradiagonales son iguales.

Por el teorema de Kronecker (Golub y Van Loan(1983)) la dimensión mínima para el vector de estado coincide con el rango de  $\mathcal{H}$ . Este rango se puede determinar de forma empírica mediante la descomposición de la matriz en valores singulares. En este caso, coincide la dimensión de  $\mathcal{H}$  con el número de valores singulares no nulos. La descomposición en valores singulares de la matriz de Hankel es:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{U} \hat{\Sigma} \hat{V}'$$

donde  $\hat{U}'\hat{U}$  y  $\hat{V}'\hat{V}$  son matrices identidad y  $\hat{\Sigma}$  es una matriz diagonal de valores singulares.

Igual que en el caso anterior, para evitar tener matrices de orden infinito, vamos a utilizar los vectores truncados de datos futuros ( $Y_{t,N_f}^+$ ) y pasados ( $Y_{t-1,N_p}^-$ ) y con estos vectores truncados vamos a definir la matriz de dimensión ( $pN_f \times pN_p$ ):

---

<sup>78</sup> En la práctica es usual trabajar con una estimación de  $\mathcal{H}$  compuesta de estimaciones muestrales de las autocovarianzas.

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{N}_f}^{\mathcal{N}_p} = E[Y_{t,N_f}^+ Y_{t-1,N_p}^-] = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \cdots & \Gamma_{N_p} \\ \Gamma_2 & \Gamma_3 & \cdots & \Gamma_{N_p+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Gamma_{N_f} & \Gamma_{N_f+1} & \cdots & \Gamma_{N_p+N_f-1} \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Fijando valores de  $N_p$  y  $N_f$  suficientemente grandes y estimada la matriz  $\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{N}_f}^{\mathcal{N}_p}$  mediante las matrices de autocorrelaciones muestrales  $\hat{\Gamma}_l = n^{-1} \sum_{i=1}^n Y_{i+l} Y_i'$  se puede descomponer la matriz  $\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{N}_f}^{\mathcal{N}_p} = \hat{U} \hat{\Sigma} \hat{V}'$ , y utilizar como estimación de su rango el número de valores singulares de la matriz  $\hat{\Sigma}$  significativamente positivos.

Para esto, considerando los vectores normalizados  $d_t^+ = R_+^{-1/2} Y_t^+$  y  $d_{t-1}^- = R_-^{-1/2} Y_{t-1}^-$ , la matriz de covarianza de estos nuevos vectores se puede expresar como una versión reescalada de la matriz tipo Hankel  $\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{N}_f}^{\mathcal{N}_p}$  mediante  $E[d_t^+, d_{t-1}^-] = R_+^{-1/2} \hat{\mathcal{H}}_m^{\mathcal{N}_p} R_-^{-1/2}$ . Calculando su descomposición en valores singulares  $E[d_t^+, d_{t-1}^-] = P \Gamma Z'$ , en la diagonal de la matriz  $\Gamma$  aparecen los coeficientes de correlación canónica<sup>79</sup> ordenados de forma decreciente. Ahora, se pueden definir las variables canónicas rotando los vectores de datos mediante las matrices de la descomposición en valores singulares, obteniendo:

$$u_t^+ = P' d_t^+ \quad \text{y} \quad u_{t-1}^- = Z' d_{t-1}^-$$

estas variables canónicas son usadas por Akaike como vectores de estado en su modelización en espacio de los estados.

<sup>79</sup> En este caso en lugar de utilizar la aproximación anterior, vamos a decantarnos por calcular directamente el coeficiente de correlación canónica entre los vectores de valores futuros y pasados de la serie.

La dimensión del sistema puede determinarse de varias formas utilizando el número de valores singulares recogidos en  $\hat{\Sigma}$  con valores significativamente distintos de cero. En este sentido, Aoki y Havenner (1991) proponen una condición análoga en la determinación de la dimensión del sistema que selecciona el número estimado de estados  $\hat{n}$  de forma que:  $\hat{\sigma}_{\hat{n}+1} / \hat{\sigma}_1$  es del orden  $1 / \sqrt{\hat{n}}$ , donde  $\mathbf{F}$  son los valores singulares de la descomposición de la matriz de Hankel, que suponemos que están ordenados de forma descendente. La determinación de este rango puede ser tarea difícil, por lo que se han propuesto distintos enfoques para determinar la dimensión del vector de estado. El primer enfoque consistente en usar una aproximación de la distribución estadística de los coeficientes de correlación canónica propuesta en Bartlett (1939) mediante el estadístico:

$$B_{\hat{n}} = - \left\{ T - \frac{1}{2} [p(N_p + N_f) + 1] \right\} \ln \prod_{j > \hat{n} + 1} (1 - \gamma_j^2) \sim \chi_{(pN_f - \hat{n})(pN_p - \hat{n})}^2 \quad (6.6)$$

donde  $N_p$  es el número de retardos considerado,  $N_f$  es el horizonte de predicción,  $p$  es la dimensión del proceso, y  $\gamma_j$  son los coeficientes de correlación canónica. La importancia relativa de  $N_p$  y  $N_f$  está fijada por la finalidad de la modelización: si se pretende ajustar un modelo a los datos observados será necesario considerar un número de retardos superior al horizonte de predicción, mientras que se aumentará éste último si el fin es la predicción.

A partir de este estadístico se establece un contraste secuencial para  $\hat{n}=1,2,\dots$  hasta no rechazar la  $H_0^{80}$  en un valor  $\hat{n}$ , que se considera la dimensión del modelo en espacio de los estados.

Lawley (1959) o Glynn y Muirhead (1978) sugieren una modificación para mejorar la expresión. Esta modificación es denominada estadístico de Bartlett-Lawley y se determina como:

---

<sup>80</sup> La hipótesis nula, considerada en este contraste, va a establecer que sólo hay  $n$  coeficientes estrictamente positivos.

$$L_{\hat{n}} = - \left[ T - \hat{n} - \frac{1}{2} ((N_p + N_f)p + 1) + \sum_{j=1}^{\hat{n}} \gamma_j^{-2} \right] \ln \prod_{j>\hat{n}} (1 - \gamma_j^2) \sim \chi_{(pN_f - \hat{n})(pN_p - \hat{n})}^2 \quad (6.7)$$

Bauer (1998) propone un método basado en la consideración del tamaño del primer valor singular rechazado,  $\hat{\sigma}_{n+1}$ . Explotando el comportamiento asintótico de las estimaciones va a definir el siguiente criterio:

$$SVC(\hat{n}) = \hat{\sigma}_{\hat{n}+1}^2 + 2\hat{n}p \frac{H_T}{T} \quad (6.8)$$

donde  $H_T > 0$ ,  $H_T/T \rightarrow 0$  denota una cota que determina las propiedades asintóticas del orden del sistema estimado. El número de parámetros en un modelo de dimensión  $n$  es igual a  $2np$ . El orden del sistema estimado,  $\hat{n}$ , es considerado como aquel valor que hace mínimo el criterio  $SVC(n)$ .

Otro enfoque en la determinación de la dimensión del modelo en espacio de los estados se basa en criterios de información. Particularmente, en el trabajo de Gel'fand y Yaglon (1959) se puede comprobar que la información mutua entre las variables canónicas viene dada por la ecuación:

$$I(u_t^+, u_{t-1}^-) = - \ln \det(I - \Gamma^2) = - \sum_{i=1}^{\hat{n}} (1 - \gamma_i^2) \quad (6.9)$$

Basándose en esta igualdad, Desai y Pal (1983) proponen el cociente:

$$\frac{\sum_{i=1}^{\hat{n}} (1 - \gamma_i^2)}{\sum_{i=1}^p (1 - \gamma_i^2)} \quad (6.10)$$

se trata de elegir los estados suficientes como para preservar un porcentaje suficientemente alto de la información estadística existente en los datos.

Otros criterios de información basados en la función de información de Kullback-Leibler son más conocidos y usados, sobretudo en modelos VAR. Estos

criterios están centrados en la obtención de una aproximación a un estimador insesgado para la esperanza de esta función de información. En este sentido, en el trabajo de Akaike (1973, 1974) se propone el AIC<sup>81</sup> (Akaike Information Criterion) como la aproximación de la anterior esperanza por el desarrollo de Taylor de primer orden. Estos criterios para determinar la dimensión del modelo han sido criticados, ya que se considera que no son eficientes en la especificación del modelo, debido a que deben converger de forma asintótica a la correcta especificación del modelo, por lo que no pueden garantizar una especificación eficiente, ya que siguen las autocovarianzas observadas con el número mínimo de estados.

### 6.3.3. ESTIMACIÓN DE LAS MATRICES DEL SISTEMA

En el caso de elegir la opción desarrollada por Bauer y Wagner (2002) habría que estimar  $\hat{W}_f^+ \hat{\beta}_{N_f, N_p} \hat{W}_p^-$ , en la elección de las ponderaciones de  $\hat{\beta}_{N_f, N_p}$  radica la diferencia entre los distintos algoritmos de estimación propuestos. El algoritmo CCA (Larimore, 1983) utiliza unas ponderaciones  $\hat{W}_f^+ = (\hat{R}_{N_f}^+)^{-1/2}$  y  $\hat{W}_p^- = (\hat{R}_{N_p}^-)^{-1/2}$  donde  $R_{N_f}$  y  $R_{N_p}$  son las matrices de correlaciones de  $Y_{t, N_f}^+$  e  $Y_{t, N_p}^-$ . Para los algoritmos MOESP (Verhaegen, 1994) y N4SID (Van Overschee y DeMoor, 1994) las ponderaciones son  $\hat{W}_f^+ = I$  y  $\hat{W}_p^- = (\hat{R}_{N_p}^-)^{-1/2}$ .

En el algoritmo MOESP la estimación de las matrices del sistema se basa en  $\hat{O}_f$  mientras el CCA explota la estructura de  $\hat{K}_p$ , dado que el estado es estimado mediante la ecuación  $\hat{x}_t = \hat{K}_p Y_{t, p}^-$ . El algoritmo MOESP es considerado más adecuado para la estimación de las matrices de sistemas que contienen variables exógenas (Bauer, 1998), mientras que con el CCA es posible obtener estimaciones que tienen las mismas propiedades asintóticas que la estimación pseudo máximo verisímil (Bauer, 2005).

---

<sup>81</sup> Este criterio de información fue analizado cuando vimos los modelos VAR y su aplicación en el caso de los modelos en espacio de los estados es similar.

No nos vamos a detener en exceso en estos algoritmos de estimación ya que, en este caso, vamos a utilizar la matriz de correlaciones para llevar a cabo la estimación y así no recurrir a un proceso de regresión que tiende a reducir la variabilidad en las series<sup>82</sup>.

El criterio que vamos a analizar para determinar una estimación de las matrices del sistema es un algoritmo basado en la teoría de sistemas desarrollado en Aoki (1987, 1990). Para ello partimos del modelo (6.2). Con este modelo, usándolo de forma recursiva, se pueden expresar las matrices de autocorrelación como  $\Gamma_\ell = H F^{\ell-1} \Omega$  donde  $\mathbf{S} = E[X_{t+1} Y_t']$ .

Si definimos la matriz de observación como  $O' = (H', F'H', \dots, (F')^{m-1}H')$  y la matriz de controlabilidad como  $\mathbf{m} = (\mathbf{S}, F\mathbf{S}, \dots, F^{m-1}\mathbf{S})$ , se obtiene que  $\mathcal{H}_m^m = O\mathbf{m}$  (una matriz de Hankel donde el número de columnas y de filas es igual)<sup>83</sup>.

Determinando la esperanza del valor futuro de la serie dados los valores pasados, se obtiene que:

$$E[Y_t^+ | Y_{t-1}^-] = \mathcal{H}_m^m R^{-1} Y_{t-1}^-$$

donde  $R = E[Y_{t-1}^- Y_{t-1}^-']$ .

La proyección ortogonal del vector de valores futuros en el espacio vectorial generado por  $Y_{t-1}^-$  se puede expresar mediante la matriz de observaciones como:

$$E[Y_t^+ | Y_{t-1}^-] = O X_t$$

---

<sup>82</sup> En control de la calidad esta reducción de variabilidad puede producir errores en caso de eliminar observaciones extremas que pueden marcar situaciones fuera de control.

<sup>83</sup> A partir de este momento se va a asumir que el número de filas y columnas de la matriz de tipo Hankel es igual, restricción no necesaria, pero que simplifica tanto la exposición como los cálculos posteriores.



Igualando términos, descomponiendo  $\mathcal{H}_m^m$  y simplificando se obtiene la ecuación de estimación de los estados:

$$X_t = \Upsilon R^{-1} Y_{t-1}^-$$

Para estimar las matrices del sistema, definiendo  $J' = (I_{p \times p}, 0, \dots, 0)$  se pueden obtener los resultados:

1.  $\hat{E}[Y_t | Y_{t-1}^-] = J' \hat{O} \hat{\Upsilon} \hat{R}^{-1} Y_{t-1}^- = \hat{H} \hat{\Upsilon} \hat{R}^{-1} Y_{t-1}^-$  de donde se obtiene que,  
 $\hat{E}[\hat{Y}_t | \hat{Y}_{t-1}^-] = (\hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2, \dots, \hat{\Gamma}_m)' = J' \hat{\mathcal{H}}_m^m = \hat{H} \hat{\Upsilon}$
2.  $\hat{E}[Y_t^+ Y_{t-1}^-] = (\hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2, \dots, \hat{\Gamma}_m)' = \hat{\mathcal{H}}_m^m J = \hat{O} \hat{\Omega}$
3.  $\hat{E}[Y_{t+1}^+ | Y_{t-1}^-] = \hat{O} \hat{F} X_t = \hat{O} \hat{F} \hat{\Upsilon} \hat{R}^{-1} Y_{t-1}^-$

Si se define la matriz:

$$\mathcal{H}^\dagger = \begin{pmatrix} \hat{\Gamma}_2 & \hat{\Gamma}_3 & \dots & \hat{\Gamma}_{m+1} \\ \hat{\Gamma}_3 & \hat{\Gamma}_4 & \dots & \hat{\Gamma}_{m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\Gamma}_{m+1} & \hat{\Gamma}_{m+2} & \dots & \hat{\Gamma}_{2m} \end{pmatrix}$$

se obtiene la expresión:  $\mathcal{H}^\dagger = \hat{O} \hat{F} \hat{\Upsilon}$ .

De estas ecuaciones se pueden extraer las estimaciones de  $F$ ,  $H$  y  $S$ . Para despejarlas se necesita invertir las matrices  $\hat{O}$  y  $\hat{\Upsilon}$ , sin embargo estas matrices pueden ser no invertibles por lo que se han de usar matrices inversas generalizadas. Estas inversas generalizadas no son únicas, por lo tanto hay que hacer alguna

elección, para ello usamos la descomposición en valores singulares de  $\hat{\mathcal{H}}_m^m$  que se obtiene como  $\hat{\mathcal{H}}_m^m = \hat{\mathcal{O}} \hat{\Upsilon} = \hat{\mathcal{U}} \hat{\Sigma} \hat{\mathcal{V}}'$ . Considerando  $\hat{\Upsilon}^- = \hat{\mathcal{V}} \hat{\Sigma}^{-1/2}$  y  $\hat{\mathcal{O}}^- = \hat{\Sigma}^{-1/2} \hat{\mathcal{U}}'$ <sup>84</sup> como inversas generalizadas, lo que supone una parametrización del vector de estado. Por lo tanto, las estimaciones para las matrices del sistema son:

$$\hat{F} = \hat{\mathcal{O}}^- \mathcal{H}_1^\dagger \hat{\Upsilon}^- \quad \hat{H} = \mathcal{H}_1^\dagger \hat{\Upsilon}^- = J' \hat{\mathcal{O}} \quad \hat{\mathcal{Q}} = \hat{\mathcal{O}}^- \mathcal{H}_1^\dagger = \hat{\Upsilon} J$$

donde  $\mathcal{H}_1^\dagger$  y  $\mathcal{H}_1^\dagger$  representan el primer bloque de  $p$  filas y el primer bloque de  $p$  columnas de  $\hat{\mathcal{H}}_m^m$  respectivamente.

Para estimar todas las matrices del sistema sólo queda estimar  $G$  que incorpora las innovaciones al vector de estado. Para ello definimos:  $\mathbf{1} = E[X_t X_t']$ ; y  $\mathbf{Q} = E[\mathbf{g}\mathbf{g}']$ , además de tener en cuenta que  $\mathbf{S} = E[X_{t+1} Y_t']$  y  $\mathbf{Y}_0 = E[Y_t Y_t']$ . Teniendo en cuenta la ortogonalidad de las innovaciones  $\mathbf{g}$ , el valor actual del estado  $X_{t/t-1}$  y considerando que los errores y estados tienen esperanza nula, simplemente tomando esperanzas de la ecuación de estado y multiplicando por su traspuesta obtenemos:

$$\mathbf{1} = F \mathbf{1} F' + G \mathbf{Q} G'$$

De forma similar, tomando esperanzas de la ecuación de observaciones, multiplicando por su traspuesta y moviendo  $\mathbf{Q}$  a la izquierda tenemos que:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Y}_0 - H \mathbf{1} H'$$

mientras que la esperanza de la ecuación de estado multiplicada por la ecuación de observación traspuesta y pasando  $G \mathbf{Q}$  a la izquierda obtenemos:

<sup>84</sup> El guión situado como superíndice en las matrices de observabilidad y controlabilidad ( “-” ) indica que se trata de matrices inversas generalizadas.

$$\mathbf{G} \mathbf{Q} = \mathbf{S} - \mathbf{F} \mathbf{1} \mathbf{H}'$$

Uniando todas las ecuaciones y sustituyendo las dos últimas en la primera se obtiene la ecuación de tipo Riccati dada por:

$$\mathbf{1} = \mathbf{F} \mathbf{1} \mathbf{F}' + (\mathbf{S} - \mathbf{F} \mathbf{1} \mathbf{H}') (\mathbf{I}_0 - \mathbf{H} \mathbf{1} \mathbf{H}') (\mathbf{S} - \mathbf{F} \mathbf{1} \mathbf{H}')'$$

que permite calcular estimaciones  $\hat{\Theta}$ ,  $\hat{\Psi}$  y  $\hat{G}$  condicionadas a las estimaciones  $\hat{F}$ ,  $\hat{\Gamma}_0$ ,  $\hat{\Omega}$  y  $\hat{H}$ <sup>85</sup>.

Para la resolución de la ecuación anterior, siguiendo a Aoki (1987) se define la matriz  $\mathbf{D} = \mathbf{F}' - \mathbf{H}' \Gamma_0^{-1} \Omega'$  y con ella la matriz:

$$\mathbf{S}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{D} - \mathbf{H}' \Gamma_0^{-1} \mathbf{H} \mathbf{D}^{-1} \Omega \Gamma_0^{-1} \Omega' & \mathbf{H}' \Gamma_0^{-1} \Omega' \\ -\mathbf{D}^{-1} \Omega \Gamma_0^{-1} \Omega' & \mathbf{D}^{-1} \end{pmatrix}$$

Expresando esta matriz en su descomposición de Schur  $\mathbf{k}' \mathbf{S}^* \mathbf{k} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix}$ ,

donde cada  $\mathbf{S}_{ij}$  es cuasitriangular superior y dividiendo la matriz  $\mathbf{k}$  de vectores de Schur en forma similar a  $\mathbf{S}^*$ , se puede probar que la matriz dada por:

$$\hat{\Theta} = \mathbf{e}_{21} \mathbf{e}_{11}^{-1}$$

es solución de la ecuación de Riccati. De esta forma, usando esta estimación se puede obtener sucesivamente las estimaciones,  $\hat{\Psi}$  y  $\hat{G}$ , completando la fase de estimación del modelo.

---

<sup>85</sup> Estas ecuaciones también pueden ser resueltas mediante procedimientos iterativos.

Este procedimiento presenta unos rasgos destacados en su comportamiento dependiente de dos elementos centrales: las restricciones impuestas y la selección de escala de los estados. Las restricciones impuestas sobre el modelo van a venir recogidas en la matriz de Hankel dado que debido a las complejas iteraciones posibles en series temporales múltiples se hace difícil establecer restricciones directamente en los coeficientes. La esencia del procedimiento consiste en sustituir en la matriz de Hankel la autocovarianza por su aproximación, basada en valores singulares distintos de cero y en sus vectores singulares asociados, imponiendo restricciones en pequeños valores singulares y por lo tanto indirectamente en los coeficientes del modelo.

En la selección de escala de los estados hay que tener en cuenta que, como los estados no son observables, pueden ser rotados sin cambiar la validez algebraica de la ecuación de observación y estado, aunque sí tiene importantes consecuencias para la modelización. Identificar los coeficientes igualando la factorización observabilidad-controlabilidad a la descomposición en valores singulares de la matriz de Hankel supone seleccionar implícitamente un sistema coordinado para el estado. Esta selección se denomina representación equilibrada, es decir, el gramiano de observabilidad ( $O^T O$ ) se iguala al gramiano de controlabilidad ( $K K^T$ ) e igual a la diagonal de la matriz que incluye los valores singulares ( $\Sigma$ ). Esta selección de coordenadas del sistema constituye una importante diferencia del algoritmo desarrollado respecto a otros procedimientos de espacio de los estados, además de permitir que el procedimiento tenga ciertas propiedades óptimas respecto a la especificación del modelo. Dentro de estas propiedades destaca la propiedad de anidamiento.

Esta propiedad establece una relación entre estimaciones para modelos equilibrados, lo que supone una pieza fundamental cuando se pretende una reducción de la dimensión del vector de estado que conserve, en la medida de lo posible, las características de la función de transferencia del modelo. Garantiza que si se especifica un tamaño para el vector de estados inferior al correcto, las estimaciones de  $F$ ,  $H$  y  $S$  serían una aproximación de menor orden a las verdaderas

matrices del sistema, lo que supone un modelo aproximado de menor dimensión que el verdadero. Si bien, los efectos más importantes (en términos de aproximación de la secuencia de autocovarianzas) son incluidos y consistentemente estimados, y sólo los efectos menores son omitidos. Por contra, si la dimensión del modelo estimado es superior a la correcta, se sabe que una parte de las matrices del sistema es redundante, manteniéndose el resto válidas, por lo que no es necesario recalcularlas.

Esta propiedad se debe a la introducción de la condición de ortogonalidad en la estimación de las matrices y no en el vector de estado, en el que puede existir correlación. Este hecho diferencia este algoritmo del propuesto por Akaike (1975), donde las componentes del vector de estado son ortogonales, pero se pierde la propiedad de anidamiento en la estimación de las matrices. Además, nos permite obtener estimaciones consistentes de las componentes más importantes del modelo cuando es mal especificado. Esta propiedad es de especial interés ya que, en la mayoría de los casos, la determinación de la dimensión del vector de estado tiene una componente intrínseca subjetiva.

Otra ventaja reside en la estabilidad de los submodelos. En Pernebo y Silverman (1982) se puede ver que todos los submodelos equilibrados de uno asintóticamente estable son, así mismo, asintóticamente estables. Este hecho, junto a la propiedad de anidamiento, facilita la obtención y análisis de submodelos, situación interesante cuando se busca la simplicidad en la interpretación de los datos.

Un posible inconveniente puede encontrarse en que este procedimiento se basa en la relación de las matrices de observabilidad y controlabilidad con la descomposición en valores singulares de la matriz de Hankel, esto supone que va a ser necesario obtener una buena factorización de dicha matriz. Por lo tanto, si la matriz de observabilidad no tiene rango de filas completo y/o la matriz de controlabilidad no tiene rango de columnas completo, los autovalores de  $S^*$  caen en el círculo unitario, lo que sugiere un modelo ajustado pobremente. Este mal

ajuste suele deberse a una selección inapropiada de: el número de estados o el parámetro de retardo  $N_p$ .

Además, el algoritmo desarrollado por Aoki, al usar una matriz de Hankel expresada en términos de la tripleta  $\{F, H, \mathbf{S}\}$ <sup>86</sup> no siempre describe un proceso estocástico, ya que se pueden producir distintos problemas:

- Tener una estimación de  $F$  cuyos autovalores no fueran todos menores que la unidad. En este caso, se produce una pérdida de estabilidad del modelo, debido a la no coincidencia entre la tripleta  $\{F, H, G\}$  y  $\{F, H, \mathbf{S}\}$ .
- En el desarrollo del algoritmo se ha supuesto que el rango de la matriz de observaciones es máximo, requisito que no se garantiza en la estimación de  $O$ .
- En la resolución algebraica de la ecuación de Ricatti la matriz propuesta  $(\hat{\Theta} = \mathbf{e}_{21} \mathbf{e}_{11}^{-1})$  es solución, si y sólo si los autovalores de  $S^*$  son estrictamente menores que la unidad.

Todo el proceso de estimación consiste en la aproximación de la matriz de autocorrelación ( $\mathcal{H}$ ), la aproximación que utilizemos no tiene por qué mantener la estructura de Hankel, por lo que su interpretación como matriz de covarianzas entre valores pasados y futuros no está del todo clara. Por estos problemas, es necesaria una fase de diagnóstico del modelo estimado que asegure la correcta especificación de éste. De existir diferencias, las soluciones propuestas son ad-hoc, si bien han sido desarrolladas distintas soluciones. En este sentido, Vaccaro y Vukina (1993) proponen aproximar la secuencia de autocorrelaciones  $\{\mathbf{r}_k\}$  de un modelo con deficiencias por otra, que produzca una estimación válida del proceso y tal que la matriz de inicio  $\bar{\Gamma}_0$  coincida con  $\mathbf{r}_0$ . Esta solución consiste en la detección de singularidades en la función de densidad espectral original mediante un rastreo en todas las posibles frecuencias. Una vez detectadas las frecuencias conflictivas, se

---

<sup>86</sup> El desarrollo original utiliza la matriz de Hankel expresándola en términos de la tripleta de matrices  $\{F, H, G\}$ .

propone una pequeña alteración que haga posible la densidad espectral en esa frecuencia. El problema de esta solución radica en una necesidad computacional intensa. Dorfman y Havenner (1992) proponen no considerar modelos con singularidades, pasando a estimar modelos con un número distinto de estados o de retardos.

Sin necesidad de resolver la ecuación de Ricatti, Östermark y Aoki (1992) u Östermark (1997) partiendo de  $X_t = \Upsilon R^{-1} Y_{t-1}^-$  y de  $\hat{H} = \mathcal{H}_t^\dagger \hat{\Upsilon}^- = J' \hat{O}$  obtienen una estimación del vector de estado y de las innovaciones mediante:

$$\begin{aligned}\hat{X}_t &= \Upsilon R^{-1} Y_{t-1}^- \\ \hat{e}_t &= Y_t - \hat{H} \hat{X}_t\end{aligned}$$

Sustituyendo la estimación del vector de estados en la ecuación de transición, multiplicando por la derecha por  $X_t'$  y tomando esperanzas se obtiene la expresión:

$$E[\hat{X}_{t+1} \hat{X}_t'] = \dots = F E[\hat{X}_t \hat{X}_t']$$

Despejando en la ecuación de transición, multiplicando por  $\hat{e}_t'$  y tomando esperanzas se llega a la ecuación:

$$E[(\hat{X}_{t+1} - \hat{F} \hat{X}_t) \hat{e}_t'] = \dots = G E[\hat{e}_t \hat{e}_t']$$

de donde se obtiene la estimación de G que completa la estimación del modelo.

Otros autores, basándose en el algoritmo de Aoki han introducido modificaciones para facilitar la estimación, manteniendo las propiedades de anidamiento y estabilidad. Así, Mitnik (1989) desarrolló un planteamiento de estimación que, conservando la esencia del de Aoki, presenta ventajas computacionales. Dada una muestra de  $N$  realizaciones de un proceso estocástico de orden  $p$  débilmente estacionario, se busca construir un modelo innovacional en

espacio de los estados lineal e invariante de la forma dada en (6.2), para obtener las estimaciones de las matrices F, H y G se considera que el proceso  $Y_t$  está generado por un proceso autorregresivo de la forma:

$$Y_t = \sum_{i=1}^m M_i Y_{t-i} + \varepsilon_t$$

donde  $\mathbf{g}$  es un ruido blanco de media nula y varianza  $E(\mathbf{g}, \mathbf{g}') = \mathbf{I}_{st} \mathbf{G}$ . Dada la muestra se pueden estimar las matrices de coeficientes por mínimos cuadrados a través de la ecuación  $\hat{\Theta} = (X'X)^{-1} X'Y$  donde  $\mathbf{1} = [M_1 \ M_2 \ \dots \ M_k]'$ ,  $Y = [Y_{k+1} \ Y_{k+2} \ \dots \ Y_N]'$  y  $X' =$

$$X' = \begin{bmatrix} Y_k & Y_{k+1} & \dots & Y_{N-1} \\ Y_{k-1} & Y_k & \dots & Y_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_1 & Y_2 & \dots & Y_{N-k} \end{bmatrix}, \text{ con } k \leq p \text{ para permitir la correcta identificación}$$

del modelo.

Para obtener la representación dada en (6.2), se plantea un sistema intermedio dado por:

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= A X_t + G Y_t \\ Y_t &= H X_t + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (6.11)$$

donde la relación entre las matrices dinámicas F y A viene dada por  $F = A + G H$ . La ventaja de considerar valores retrasados de Y como inputs en la ecuación de transición permite interpretar los coeficientes autorregresivos  $M_i$  como parámetros de impulso respuesta de (6.11), dados por  $M_i = H A^{i-1} G$  para  $i = 1, 2, \dots$  con lo que se puede construir la matriz estimada:



$$\hat{\mathcal{H}}_{\hat{k}} = \begin{bmatrix} \hat{M}_1 & \hat{M}_2 & \dots & \hat{M}_k \\ \hat{M}_2 & \hat{M}_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{M}_k & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

que es de tipo Hankel por bloques. A partir de aquí, este algoritmo sigue un proceso análogo al anterior. Concretamente, esta matriz puede ser factorizada a través de  $\hat{\mathcal{H}}_{\hat{k}} = \hat{O}_k \hat{R}_k$  donde  $O_k' = [C' \ (CF)' \ \ddots \ (C^{fk-1})']$  y  $R_k = [G \ FG \ \ddots \ F^{k-1}G]$ ; usando la descomposición en valores singulares para estimar la factorización anterior, se puede expresar la igualdad  $\hat{\mathcal{H}}_{\hat{k}} = \hat{O}_k \hat{R}_k = \hat{U} \hat{Q} \hat{V}'$  donde  $\hat{U}'\hat{U} = \hat{V}'\hat{V} = I$  y la matriz  $\hat{Q}$  contiene en su diagonal los valores singulares de  $\hat{\mathcal{H}}_{\hat{k}}$  ordenados de forma decreciente.

A partir de esta igualdad se pueden obtener las estimaciones:

$$\hat{O}_k = \hat{U} \hat{Q}^{1/2} \quad ; \quad \hat{R}_k = \hat{Q}^{1/2} \hat{V}' \quad (6.12)$$

que proporcionan un modelo internamente equilibrado. En el caso no estocástico, la matriz  $\mathbf{k}$  adoptaría la forma  $\mathbf{k} = \text{diag}(q_1, q_2, \ddots, q_n, 0, \ddots, 0)$  siendo  $n$  la dimensión del sistema; por contra, ante perturbaciones aleatorias  $q_i > 0$  en toda la diagonal de la matriz  $\mathbf{k}$ , dificultando la identificación de  $n$ . En este caso, las técnicas de reducción de la dimensión permiten separar el modelo en dos subsistemas, uno llamado “dominante” y otro “débil” de la forma:

$$\begin{bmatrix} X_{1,t+1} \\ X_{2,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \varepsilon_t \quad (6.13)$$

$$Y_t = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \end{bmatrix} + \varepsilon_t \quad (6.14)$$

donde el subsistema débil ( $A_{22}$ ,  $G_2$ ,  $H_2$ ) contribuye poco a la respuesta del sistema y se puede atribuir a la presencia de perturbaciones aleatorias. Por contra, el subsistema dominante ( $A_{11}$ ,  $G_1$ ,  $H_1$ ) asociado con los  $n$  valores singulares mayores puede considerarse como una aproximación válida al proceso generador de datos. La matriz de Hankel correspondiente al subsistema dominante, que denotaremos por  $\tilde{\mathcal{H}}$ , se obtiene eliminando los  $p-k$  valores singulares inferiores de la matriz  $\hat{\mathbf{q}}$  así como, las correspondientes columnas de las matrices  $\hat{\mathbf{U}}$  y  $\hat{\mathbf{V}}$ . Así, denotando por  $\tilde{\mathbf{q}}$ ,  $\tilde{\mathbf{U}}$  y  $\tilde{\mathbf{V}}$  a las matrices modificadas, se puede expresar la igualdad<sup>87</sup>  $\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{V}}'$  que proporcionaría las estimaciones:

$$\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{q}}^{1/2} \quad ; \quad \tilde{\mathbf{O}} = \tilde{\mathbf{q}}^{1/2} \tilde{\mathbf{V}}' \quad (6.15)$$

De esta forma, utilizando las definiciones de las matrices  $\mathbf{O}$  y  $\mathbf{R}$ , una estimación de la matriz  $\mathbf{H}$  de (6.11) viene dada por las primeras  $p$  filas de  $\tilde{\mathbf{O}}$  y la estimación de la matriz  $\mathbf{G}$ , a través de las primeras  $p$  columnas de  $\tilde{\mathbf{R}}$ . Ahora, una estimación de la matriz  $\mathbf{A}$  viene dada a través de la ecuación  $\hat{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{q}}^{-1/2} \tilde{\mathbf{U}}' \mathcal{H}_{\hat{\mathbf{k}}}^\dagger \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{q}}^{-1/2}$  donde  $\mathcal{H}_{\hat{\mathbf{k}}}^\dagger = \mathcal{L}^{-1} \mathcal{H}_{\hat{\mathbf{k}}}$ . Con este resultado, la estimación de la matriz dinámica original (6.2) es  $\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{H}}$ .

Este método de estimación proporciona directamente una estimación de la matriz de filtrado  $\mathbf{G}$ , sin necesidad de resolver la ecuación de Riccati que aparece en el método de estimación de Aoki. Este hecho, unido a la propiedad de anidamiento de las estimaciones, facilita la labor de aproximación de modelos de orden inferior. Específicamente, si tenemos una estimación del modelo (6.11) dada por  $(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{G}}, \hat{\mathbf{H}})$  y se considera un sistema de dimensión  $n_1 < n$ , la estimación de tal

---

<sup>87</sup> No es una matriz tipo Hankel, pero se utiliza para estimar las matrices del sistema considerándola como una matriz de autocorrelaciones.

subsistema se obtiene eliminando las correspondientes filas y columnas de las matrices  $(\hat{A}, \hat{G}, \hat{H})$  sin más necesidad de cálculos adicionales.

Un planteamiento semejante al expuesto, pero partiendo de una representación de (6.2) como una convolución del input y output de la forma  $Y_t = \Psi(L) \epsilon_t + \delta_t = \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i \epsilon_{t-i} + \delta_t$  fue propuesta por Otter y Van Dal (1989). Young y otros (1989) desarrollan un algoritmo de estimación de matrices denominado descomposición espectral secuencial (SSD, del inglés Sequential Spectral Decomposition), donde se explotan las propiedades espectrales del algoritmo de Kalman, junto a una primera aproximación a estimaciones máximos verosímiles.

Por último, el enfoque más obvio desde un punto de vista teórico consiste en la estimación de las matrices mediante máxima verosimilitud. Si consideramos las perturbaciones en el modelo con distribución normal, la función de verosimilitud de las observaciones se puede obtener a partir de la descomposición, en error de predicción, del filtrado de Kalman. Así, es posible maximizar esta verosimilitud respecto a los parámetros desconocidos usando algún algoritmo numérico de optimización, si bien, se trata de un método bastante complejo<sup>88</sup>.

---

<sup>88</sup> Esta complejidad ha supuesto que en la mayoría de trabajos teóricos sobre modelización en espacio de los estados el tema de la estimación se asuma resuelto por máxima verosimilitud, sin entrar en la complejidad numérica que esta solución conlleva, limitándose a la exposición del filtrado de Kalman.

#### 6.2.4. ESTIMACIÓN DEL VECTOR DE ESTADOS E INNOVACIONES DEL MODELO

Una vez determinado el orden y las matrices del sistema hay que generar una serie de valores del vector de estado, necesarias junto con las observaciones del proceso para determinar el valor de las innovaciones. Estas innovaciones constituyen el elemento fundamental para poder desarrollar el control estadístico de la calidad del proceso, debido al comportamiento que presentan cuando el modelo se establece de una forma correcta.

La ecuación  $X_t = \Upsilon R^{-1} Y_{t-1}^-$  proporciona las estimaciones para el vector de estado dependiendo de los valores de  $\Upsilon = (\Omega, F\Omega, \dots, F^{t-1}\Omega)$ ,  $R = E[Y_{t-1}^- Y_{t-1}^{-'}]$  y  $\Omega = E[X_{t+1} Y_t^{-'}]$ . Si bien, la necesidad de cálculos aumenta cuando avanzamos temporalmente dada la primera observación  $Y_0$ , es posible estimar el primer estado  $X_1$  y a partir de este generar el resto de los valores del vector de estado. Para obtener estas estimaciones sólo hay que sustituir el valor correspondiente al vector de estado  $X_t$  y al de observación  $Y_t$  en la ecuación de medida ( $Y_t = HX_t + \mathbf{g}$ ) para estimar la innovación en el instante  $t$ , valor que será usado en la ecuación de transición para generar el valor del estado en el instante siguiente. Por lo tanto, se trata de un algoritmo recursivo que permite identificar  $X_t$  junto a  $\mathbf{g}$  a partir de la especificación del estado inicial. Sin embargo, el carácter de estimación que tiene se transmite a toda la serie de valores de estado y no existen herramientas que aseguren las buenas propiedades de la serie así estimada.

El problema consiste en determinar un método para construir la mejor estimación del vector  $X_t$  dadas las observaciones  $Y_s$ ,  $1 \leq s \leq t+n$ , el algoritmo que resuelve este problema es conocido como filtro de Kalman<sup>89</sup>. El filtro de Kalman

---

<sup>89</sup> El filtro de Kalman constituye el elemento fundamental para poder llevar a cabo el control estadístico de la calidad mediante una modelización de las observaciones en espacio de los estados, ya que, el estimador de Kalman nos permitirá obtener de forma recursiva el valor de las innovaciones.

es un algoritmo de ortogonalización de Gram-Schmidt de la serie del output en el espacio generado por el vector de estado, generando así las innovaciones del modelo. El estimador de Kalman se obtiene como una combinación lineal de la estimación del vector de estado obtenida a través de la ecuación de transición y la obtenida mediante la ecuación de observación<sup>90</sup>. Se impone que este estimador sea insesgado y de varianza mínima. Además, si el estado inicial es gaussiano este estimador coincide con el de mínimos cuadrados lineales.

El filtrado de Kalman puede usarse también con procesos no estacionarios, siempre que el proceso sea estable. Además, se trata de un método recursivo que permite el cálculo en tiempo real de las estimaciones, aunque está restringido a procesos con función de transferencia racional. Este algoritmo parte del modelo:

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= F X_t + G \varepsilon_t \\ Y_t &= H X_t + \varepsilon_t \end{aligned}$$

donde  $\Psi = E[\varepsilon_t, \varepsilon_t']$  es estimada a partir de la resolución de la ecuación de Ricatti y  $\hat{X}(t/s)$  es la estimación del vector de estado en el instante  $t$  dada la información recogida hasta el instante  $s$ . El filtrado de Kalman se puede analizar en tres etapas: primero se fijan las condiciones iniciales para obtener la primera estimación del vector de estado, después se obtiene la estimación de las innovaciones usando la ecuación de observación y se actualizan las estimaciones del vector de estados (observación y actualización de la información) y, por último, se lleva a cabo la predicción del vector de estado para el período siguiente.

---

<sup>90</sup> La estimación obtenida mediante la ecuación de transición indica cómo se genera el valor de estado para el instante inmediatamente siguiente en función de la información actual disponible del estado y la innovación, mientras que en la obtenida con la ecuación de observación se introduce la innovación contemporánea al vector que se estima.

## Condiciones iniciales

Estas condiciones dependen del valor del estado en un instante inicial  $\hat{X}(1|0)^{91}$  y de su varianza  $P(1) = E[X(1) X(1)']$ . Estos valores se determinan con anterioridad a la aplicación del algoritmo. Para un instante cualquiera  $t$ , se supone que conocida una estimación inicial del vector de estado  $\hat{X}(t|t-1)$  junto a una primera estimación de su varianza  $P_t = E[X_t X_t']$ . Con estos valores iniciales y la ecuación de observación se puede obtener una matriz de covarianzas del output del sistema en el instante actual como:

$$\Sigma_t = H P_t H' + \Psi \quad (6.16)$$

por lo que tenemos toda la información disponible antes de la obtención del output  $Y_t$ .

Cuando se trabaja con procesos estacionarios y la amplitud de la muestra es grande la determinación del estado inicial no juega un papel muy importante, ya que suele ser habitual considerar que  $\hat{X}(1|0) = 0$  y obtener su varianza como<sup>92</sup>:

$$P(1) = F P(1) F' + G \Psi G' \quad (6.17)$$

Esta práctica se puede llevar a cabo por las propiedades de convergencia<sup>93</sup> y estabilidad del filtrado de Kalman que suponen que cualquier error en la iniciación del algoritmo, así como en las observaciones  $Y_t$ , presenta un defecto que decrece geométricamente a cero.

---

<sup>91</sup> La referencia temporal se introduce entre paréntesis por comodidad.

<sup>92</sup> La elección de los valores iniciales es tratada de forma amplia en los trabajos de Casals, Sotoca y Jerez (1999, 2000 y 2001).

<sup>93</sup> Si los procesos son estacionarios se puede probar que cuando  $t$  converge a infinito entonces;  $\hat{G} \hat{G}$ ,  $K_t \hat{G} K$ ,  $P_t \hat{G} 0$  y  $E_t$  converge en media cuadrática a  $\mathbf{g}$ .

Cuando la amplitud muestral no es grande, la nulidad del valor inicial del estado puede provocar un mal ajuste en el algoritmo de Kalman mientras que, una buena especificación puede mejorar sensiblemente las estimaciones sucesivas. En estos casos se pueden usar distintos métodos para determinar el mejor valor inicial, siguiendo el criterio de elegir un valor del punto inicial que minimice la norma de la matriz de varianza  $P(t)$  para los sucesivos valores de  $t$ . En ocasiones puede existir más de un valor inicial, asumiendo que las condiciones iniciales son difusas, por lo que se introduce una perturbación aleatoria en el estado inicial dando lugar a lo que se denomina filtrado difuso de Kalman (ver, por ejemplo, Kohn y Ansley, 1989 o Kitagawa y Gersh, 1984).

También se puede considerar una distribución para el estado inicial (en la mayoría de los casos normal) que unida a la normalidad de la innovación puede convertir el filtrado de Kalman en un algoritmo de actualización de los momentos de la distribución (Fahrmeir y Tutz, 1991) o desde un punto de vista bayesiano en Vargas y Gámez (1995).

La alternativa que vamos a utilizar en este trabajo consiste en usar la fase de estimación de las matrices descritas por el algoritmo de Aoki para extraer la ecuación que relacione el estado inicial con las primeras observaciones del sistema. En este algoritmo la ecuación  $X_t = \Upsilon R^{-1} Y_{t-1}^-$  particularizada a  $t=1$  proporciona la relación  $X(1|0) = \Upsilon R^{-1} Y_0^-$  que se puede usar como inicialización del filtrado de Kalman.

### Observación y actualización de la información

En el momento en que tenemos el valor de  $Y_t$ , utilizando la ecuación de observación del sistema se pueden obtener las innovaciones como:

$$E_t = Y_t - H \hat{X}(t | t - 1) \quad (6.18)$$

Esta innovación, junto a la estimación original del vector de estado es usada para actualizar la estimación del vector de estado mediante la ecuación:

$$\hat{X}(t | t) = \hat{X}(t | t-1) + P_t H' \Sigma_t^{-1} E_t \quad (6.19)$$

con lo que se obtiene el estimador de Kalman para el estado en  $t$ .

### Predicción del vector de estado

Una vez analizada la información disponible en el instante actual, se predice el valor del vector de estado para el instante siguiente con la expresión<sup>94</sup>:

$$\hat{X}(t+1 | t) = F \hat{X}(t | t-1) + K_t E_t \quad (6.20)$$

donde  $K_t$  se conoce como matriz de ganancia de Kalman y se determina como:

$$K_t = [F P_t H' + G \Psi] \Sigma_t^{-1} \quad (6.21)$$

También se puede actualizar la información sobre la varianza del vector de estados a través de la ecuación:

$$P_{t+1} = F P_t F' + G \Psi G' - K_t \Sigma_t K_t' \quad (6.22)$$

Por lo que se pueden usar los valores actualizados del vector de estado y su varianza como condiciones iniciales en  $t+1$ . Con los valores obtenidos en (6.20) y (6.22) se puede iniciar de nuevo el ciclo recogido anteriormente.

Las ecuaciones comprendidas entre (6.15) y (6.22) forman el algoritmo de estimación de Kalman que permite estimar el valor del vector de estado  $X_t$  de forma recursiva en base a la información disponible hasta ese momento. Si no se dispone de información sobre  $Y_t$  se puede usar este algoritmo considerando  $\mathbf{g}=0$ , lo que permite el tratamiento de series con algunas observaciones omitidas. Además, si se

---

<sup>94</sup> Esta expresión sólo se diferencia de la ecuación de transición del modelo en la matriz  $G$ . En este caso, esta matriz es sustituida por la matriz de ganancia de Kalman que hace que se gane eficiencia, ya que la variabilidad de la matriz de ganancia permite un mejor ajuste de las observaciones.



supone normalidad en la innovación, como el estimador de Kalman coincide con el de mínimos cuadrados ordinarios, el algoritmo actúa como si  $Y_t$  fuera reemplazada por su estimación máximo verosímil lo que supone una primera estimación de valores perdidos.

Si en la estimación de  $\hat{X}(t|t)$  se usa la información  $Y_s$  para valores  $s > t$ , es decir, se usa toda la información disponible para estimar los vectores de estado, el algoritmo de Kalman recibe el nombre de alisado, éste será de gran aplicación en la fase I del control estadístico de la calidad al permitir obtener un comportamiento de las observaciones mucho más suavizado. En este caso, se empieza la estimación por la última observación y se acaba con la primera, de esta forma se usa toda la información disponible en cada instante muestral. Este algoritmo de filtrado muestra una gran estabilidad numérica en la resolución de la ecuación de Riccati que actualiza la varianza del estimador de Kalman (6.22).

Otro fenómeno que afecta en la aplicación del filtrado es conocido como divergencia de filtro. Cuando el modelo está mal especificado, aunque la covarianza del error sea pequeña puede ocurrir que el error actual de estimación no esté acotado. Esto es debido a la tendencia de la matriz de ganancia a cero, lo que supone distanciamientos entre observaciones y predicciones.

### **6.3. CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICOS DE CONTROL BASADOS EN MODELOS EN ESPACIO DE LOS ESTADOS**

Una vez expuesta la metodología de modelos en el espacio de los estados, en este epígrafe vamos a desarrollar la construcción de gráficos de control para procesos multivariantes autocorrelacionados. La motivación básica para este planteamiento estriba en la doble causa de la autocorrelación muestral. Por un lado, ésta puede deberse a deficiencias, difícilmente evitables, en la obtención de la muestra, que ocasionan un mal comportamiento estadístico de los gráficos clásicos, aumentando fundamentalmente el número de falsas alarmas. En este caso resulta apropiado aplicar un modelo de filtrado que elimine la autocorrelación, preservando la mayor cantidad posible de información, y construir un gráfico de control sobre los residuos. Sin embargo, también es posible que esta autocorrelación sea reflejo de la existencia de algún “factor latente” o “inercia”, inherente al proceso, y que aporte información básica sobre éste. En esta situación, la consideración exclusiva de los residuos de un filtrado no es estadísticamente óptima, ya que se obvia una parte fundamental del proceso, siendo necesaria la estimación eficiente de dicho “factor inercial” y la construcción de un gráfico para su control.

Con la modelización en espacio de los estados podemos desarrollar un nuevo método de control de la calidad en procesos multivariantes autocorrelacionados, basado en una metodología similar a la propuesta por Alwan y Roberts (1988) para el caso univariante, mediante la utilización de las innovaciones ( $g$ ) y de los estados ( $X_t$ ) resultantes de dicha modelización. Las innovaciones, equivalentes a los residuos procedentes de una modelización VAR, nos van a permitir desarrollar un gráfico que recoja el comportamiento innovacional o no previsible del proceso, controlando la existencia causas asignables cuyos efectos son de gran magnitud y corta duración temporal. Los estados van a recoger el comportamiento inercial del proceso, y un gráfico sobre ellos permite controlar las alteraciones en el comportamiento general, bien producto de cambios en la estructura de correlación

de las series bien ocasionados por causas asignables cuyos efectos no sean de corta duración<sup>95</sup>.

Así, dado un proceso multivariante autocorrelacionado  $Y_t$ , su representación en espacio de los estados dada por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= F X_t + G \varepsilon_t \\ Y_t &= H X_t + \varepsilon_t \end{aligned}$$

permite la estimación tanto de las innovaciones del proceso como de las variables de estado, tal y como se recoge en el epígrafe anterior.

Por las propiedades de los algoritmos utilizados, las innovaciones ( $\mathbf{g}$ ) no presentan autocorrelación y, si el proceso se encuentra bajo control y el modelo está bien especificado, deben ser asintóticamente normales con media cero y varianza  $\mathbf{Q}$ . En estas condiciones, podemos construir un gráfico  $T^2$  de Hotelling para controlar su evolución. En concreto, utilizando la estimación de la matriz  $\mathbf{Q}$  dada por el proceso de filtrado en espacio de los estados, podemos obtener el valor del estadístico  $T^2$  de Hotelling para la observación  $i$ -ésima mediante la expresión:

$$T_{\varepsilon_i}^2 = \varepsilon_i' \hat{\Psi}^{-1} \varepsilon_i \quad (6.23)$$

Este valor se representa gráficamente junto al límite de control correspondiente, obtenido como:

$$LSC(T_{\varepsilon_i}^2) = \frac{(m-1)^2}{m} \beta_{\alpha, p/2, (m-p-1)/2} \quad (6.24)$$

que coincide con el obtenido para las series originales, ya que el número de variables coincide con el número de innovaciones y no se pierde ninguna observación a consecuencia del filtrado.

---

<sup>95</sup> En un planteamiento VAR, dichos efectos tienden a ser incorporados en el modelo autorregresivo en detrimento de los residuos, por lo que el control exclusivo de éstos últimos dificulta la detección eficiente de dichas causas asignables.

Este gráfico nos va a permitir detectar aquellas causas asignables de variación que presentan un efecto de relativa magnitud y breve duración temporal, siendo comparable en su interpretación al desarrollado en Pan (2002). Sin embargo, existen algunos aspectos distintos producto de la metodología estadística empleada en su estimación. Por un lado, el algoritmo de estimación de las matrices del modelo, garantiza la minimalidad del vector de estados<sup>96</sup> y, por otro, la utilización del filtrado de Kalman asegura que éstos constituyen la estimación lineal óptima<sup>97</sup> de la dinámica del proceso. Todo ello confluye en la obtención de unas innovaciones que recogen toda la información complementaria, lo que permite su análisis exhaustivo.

Para analizar la respuesta de este gráfico ante cambios en la media del proceso se ha comprobado mediante la simulación de cien procesos autocorrelacionados que el comportamiento del ARL no es peor que en el caso del gráfico VAR. Si bien, hay que destacar que cuando existen niveles de autocorrelación moderados se produce: una mejora de la respuesta del gráfico ante cambios de pequeña dimensión en la media del proceso; y una reducción en el número de falsas alarmas.

Concretamente, en Pan(2002) aparece recogido el recorrido medio de racha del gráfico VAR, con un nivel de autocorrelación de intensidad media, tomando un valor bajo control de 215, en el caso del gráfico de innovaciones el valor es de 223, valor que mejora el comportamiento y va a hacer que el número de falsas alarmas dadas por el gráfico se reduzca. En el caso de cambios grandes en la media, estos gráficos presentan un comportamiento similar con valores de 1,24 y 1,20, respectivamente. Por otro lado, cuando las variaciones son de pequeña magnitud, el gráfico VAR va a presentar un ARL de 113 y el gráfico de innovaciones 108, esta situación hace que seamos más rápidos en la detección de pequeñas variaciones en la media del proceso. Estos resultados muestran que el gráfico de innovaciones

---

<sup>96</sup> Recordemos que el algoritmo desarrollado equilibra los gramianos de las matrices de observabilidad y controlabilidad, insuflando dichas características al sistema estimado, es decir, garantizando la minimalidad de la representación.

<sup>97</sup> Óptima en el sentido mínimo-cuadrático de la expresión.

presenta un comportamiento similar al gráfico VAR en los casos en los que éste presenta un comportamiento adecuado (ante autocorrelación negativa o positiva elevada) y en las situaciones donde falla se comporta algo mejor.

Sin embargo, la gran novedad de la metodología propuesta radica en el análisis de las variables de estado. Como ya se ha comentado, existen casos donde la sola eliminación de la autocorrelación no es apropiada, siendo necesario analizar el comportamiento general del proceso y no sólo por la importancia de la estructura de correlación. Una causa asignable cuyos efectos sean relativamente persistentes puede no ser eficientemente detectada ya que, por el propio planteamiento del proceso de filtrado, sus efectos son repartidos entre la componente residual y la “inercial”<sup>98</sup>. En concreto, analizando la ecuación de actualización del vector de los estados:

$$X_{t+1} = F X_t + G \varepsilon_t$$

observamos cómo los efectos de las innovaciones se agregan a los valores futuros del vector de estados a través de la matriz G. Así, una causa asignable de efectos puntuales se manifiesta en las innovaciones y en el valor siguiente de los estados, pero su efecto desaparece rápidamente<sup>99</sup>. Por el contrario, si ésta presenta una relativa permanencia temporal, sus efectos serán detectables en la evolución del vector de estados y, dada la eficiencia de su estimación, los asume dentro de su dinámica. Por ello, no constituirán “innovación” para los instantes futuros y la metodología tenderá a no incluirlos en los residuos del modelo. Este fenómeno es común a todos los algoritmos de filtrado, por lo que la única vía para detectar eficientemente dichos efectos consiste en la utilización de gráficos de control sobre la componente no residual.

---

<sup>98</sup> La proporción del reparto depende de la permanencia temporal de los efectos: cuanto más perduren en el tiempo mayor será la parte atribuida a la dinámica del sistema.

<sup>99</sup> Tanto porque no se manifiesta en los valores futuros de la innovación como por el efecto desvanecedor de la matriz G ante la mayor importancia de la matriz dinámica F dentro de la ecuación de transición.

Para la construcción de un gráfico de control para los estados hay que tener en cuenta que éstos no tienen por qué estar incorrelados, por lo que su interpretación debe ser cuidadosa. Así, dada la forma de estimación, dicho gráfico debe recoger la dinámica general del proceso cuando éste se halle bajo control y sólo se alterará ante un cambio momentáneo en la estructura de correlación contemporánea o la aparición de una causa asignable con permanencia temporal. El primer caso debería traducirse en un valor anómalo de magnitud relativamente grande pero de efecto puntual, mientras que el segundo se manifestará en una serie consecutiva de cambios.

Ante esta dicotomía se puede plantear un gráfico tipo  $T^2$  de Hotelling o un esquema de control MEWMA. El primero de ellos, por su estructura, resulta más eficaz para la detección de cambios momentáneos de gran magnitud, pero es más sensible a la existencia de autocorrelación. Así, en procesos donde este fenómeno es moderado o predomina la existencia de correlación cruzada, puede ser una alternativa válida. En estos casos, dada la secuencia de estados obtenida, obtendríamos los respectivos valores del estadístico  $T^2$  mediante la expresión:

$$T_{x_i}^2 = (X_i - \mu_x)' \Theta^{-1} (X_i - \mu_x) \quad (6.25)$$

donde  $X_i$  denota el valor de estados,  $\mu_x = E[X_i]$  y  $\Theta = E[(X_i - \mu_x)(X_i - \mu_x)']$ .

El valor del estadístico se representaría gráficamente junto al límite de control:

$$LSC(T_{x_i}^2) = \frac{(m-1)^2}{m} \beta_{\alpha, p/2, (m-p-1)/2} \quad (6.26)$$

que será generalmente inferior al obtenido para las series originales, ya que la estructura de correlación llevará a obtener una reducción de la dimensión.

Las limitaciones de este gráfico, comentadas en los capítulos anteriores, y la posibilidad de un alto grado de autocorrelación en los estados pueden hacer aconsejable la utilización de un esquema muestral distinto, adoptando un gráfico MEWMA. Éste presentará un ARL menor ante cambios de magnitud media, como los producidos por una causa asignable de duración moderada, y es más robusto ante la presencia de autocorrelación muestral. En este caso hay que determinar los valores MEWMA mediante la ecuación:

$$Z_i = \Lambda \cdot X_i + (1 - \Lambda) \cdot Z_{i-1} \quad (6.27)$$

donde:

- $Z_i$  es el i-ésimo vector de valores EWMA, además hay que tener en cuenta que  $Z_0$  va a ser considerado como el vector de medias de los estados.

- $X_i$  es el i-ésimo vector de valores de los estados.

- $\Lambda$  es una matriz diagonal formada por los valores lambda para las distintas variables ( $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ ). Además, hay que tener en cuenta que  $\Lambda$  es una constante que va a determinar el peso o importancia que le estamos dando a las observaciones de períodos pasados ( $0 < \Lambda < 1$ ) y, en este caso, vamos a considerar un valor lambda igual para todos los estados.

- $n$  es el número de estados, este valor nos va a determinar el número de elementos en cada vector.

A partir de estos valores MEWMA habrá que calcular un estadístico que utilizaremos para analizar el comportamiento del proceso, este estadístico adopta la expresión:

$$T_i^2 = Z_i' \cdot \Sigma_{z_i}^{-1} \cdot Z_i \quad (6.28)$$

donde  $\Sigma_{z_i}^{-1}$  es la matriz de varianzas-covarianzas de los valores EWMA.

Vamos a considerar que tenemos muestras de un tamaño suficientemente grande como para utilizar la aproximación de la matriz de varianzas-covarianzas de los valores EWMA de la siguiente forma:

$$\Sigma_{z_i} = \frac{\lambda}{2 - \lambda} \Theta \quad (6.29)$$

donde  $\mathbf{\Theta} = E[X_t, X_t']$ .

El valor del estadístico se representaría gráficamente junto al límite de control correspondientes, el valor de éste, determinado por Prabhu y Runger (1997) condicionado a un valor del ARL bajo control de 200, aparece recogido en la tabla 3.1 para un número de estados<sup>100</sup> igual a 2, 4 ó 6.

Recorrido Medio de Racha gráfico MEWMA (ARL)						
		8				
		0,05	0,1	0,2	0,3	0,4
P	*	H=7,35	H=8,64	H=9,65	H=10,08	H=10,31
2	0	199,93	199,98	199,91	199,82	199,83
	0,5	26,61	28,07	35,17	44,1	53,82
	1	11,23	10,15	10,2	11,36	13,26
	2	5,28	4,42	3,78	3,56	3,53
		H=11,22	H=12,73	H=13,87	H=14,34	H=14,58
4	0	199,84	200,12	199,94	199,91	199,96
	0,5	32,29	35,11	46,3	59,28	72,43
	1	13,48	12,17	12,67	14,81	18,12
	2	6,31	5,19	4,41	4,2	4,24
		H=14,60	H=16,27	H=17,51	H=18,01	H=18,26

<sup>100</sup> Para un número de estados distinto al recogido en la tabla 3.1 puede consultarse el artículo original de Prabhu y Runger (1997).



Recorrido Medio de Racha gráfico MEWMA (ARL)						
		8				
		0,05	0,1	0,2	0,3	0,4
6	0	200,11	200,03	200,11	200,18	199,81
	0,5	36,39	40,38	54,71	70,3	85,1
	1	15,08	13,66	14,63	17,71	22,27
	2	7,05	5,74	4,88	4,68	4,8

Con cualquiera de las alternativas comentadas para el gráfico de estados, un control del proceso debe combinar el análisis de dicho gráfico con el construido sobre las innovaciones, ya que la información que recogen es complementaria.

## **TERCERA PARTE**



## **CAPÍTULO 7**

### **APLICACIÓN PRÁCTICA**

#### **7.1. DESCRIPCIÓN DEL PROCESO**

Este trabajo quedaría incompleto si no se llevara a cabo una aplicación práctica donde quedara de manifiesto la utilidad de los métodos propuestos. Vamos a aplicar la metodología propuesta en el control de la calidad de un proceso de fabricación de hojas de cuchillos jamoneros. La elección de este proceso se debe a la gran importancia que la industria cuchillera tiene en la provincia de Albacete y a las características técnicas de este proceso, que lo hacen idóneo para constatar las propiedades de los algoritmos desarrollados. En este proceso de producción se hace necesario un enfoque multivariante dado que se consideran cinco medidas para determinar la calidad en la hoja del cuchillo. Hay que destacar la sensibilidad de estas medidas ante leves variaciones muestrales y la autocorrelación existente, tanto propia como inducida por la alta frecuencia en la toma de muestras; por contra, la correlación cruzada no presenta efectos significativos. Estas

características hacen que presente un comportamiento idóneo para poner de manifiesto la utilidad de los algoritmos desarrollados en este trabajo.

La hoja de este tipo de cuchillos presenta unas características especiales que las diferencia de las de los cuchillos convencionales, dotándolas de un comportamiento ideal para el corte del jamón. En el control de la calidad de las hojas de los cuchillos se consideran varios parámetros<sup>101</sup>, si bien en este trabajo nos centraremos en el análisis de las variables que afectan al grosor de la hoja, determinantes del comportamiento en el corte.

El proceso de fabricación de cuchillos jamoneros no es continuo, sino que funciona bajo pedido. Esta peculiaridad hace que se disponga de gran cantidad de información obtenida en un intervalo de tiempo relativamente pequeño, propiciando la aparición de cierto grado de autocorrelación muestral. Ésta, a diferencia de la autocorrelación propia del comportamiento del proceso que aporta información, debería ser eliminarla antes de establecer un gráfico de control óptimo.

En este epígrafe, empezaremos analizando la información disponible, resaltando las propiedades estadísticas básicas para la elaboración de los gráficos de control. Posteriormente, vamos a aplicar los gráficos de control clásicos, intentando detectar posibles variaciones indeseadas en el comportamiento general del proceso. Empezaremos ignorando la existencia de autocorrelación, intentando dejar de manifiesto el comportamiento errático de los gráficos clásicos.

En un segundo paso, y para paliar el efecto negativo de este problema, aplicaremos los métodos existentes en la literatura especializada. Concretamente, nos vamos a centrar en el filtrado de la información con modelos de series temporales. Primero, modelizaremos cada variable de forma independiente y,

---

<sup>101</sup> Estos parámetros persiguen controlar el grosor, la longitud y la anchura de la hoja del cuchillo, si bien, nos vamos a centrar en los primeros.

después , usaremos modelos multivariantes (modelos de vectores autorregresivos (VAR)).

Por último, vamos a utilizar los algoritmos desarrollados en este trabajo mediante la modelización de la información con la metodología de espacio de los estados y la aplicación de métodos robustos que agilicen el procedimiento de ajuste del gráfico de control. La modelización en espacio de los estados nos va a permitir, desde una óptica multivariante, eliminar el comportamiento errático producido por la existencia de autocorrelación y reducir la dimensión del vector muestral. Por otro lado, el uso de técnicas robustas en la estimación de los parámetros del gráfico nos va a permitir eliminar los tediosos cálculos iterativos necesarios en el ajuste y estimación de éste.

## 7.2. RECOGIDA Y TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN

La información disponible recoge el comportamiento de las cinco variables relacionadas con el grosor de la hoja del cuchillo, características que sirven para determinar la calidad del cuchillo en términos de comportamiento de la hoja en el corte. Estas cinco variables, denotadas A, B, C, E y F, han sido tomadas en puntos del cuchillo que se consideran de vital importancia. La figura 7.1 recoge la ubicación de cada una de estas medidas.

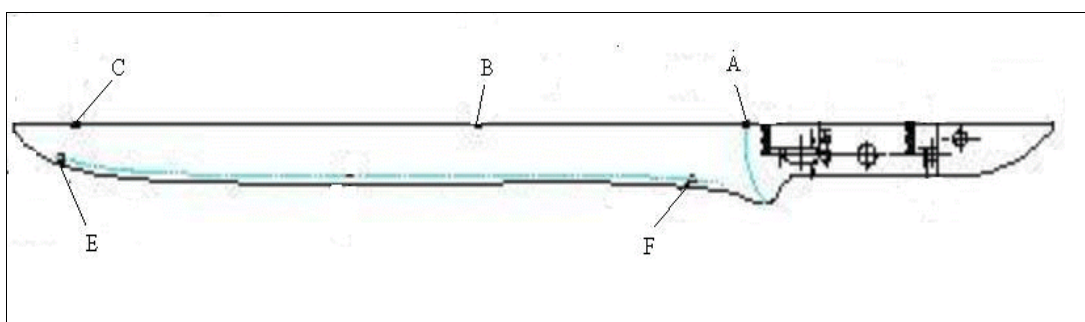


Figura 7.1: Cuchillo jamonero con la ubicación de cada una de las variables.

Estas características se pueden dividir en dos grandes bloques: medidas para dotar al cuchillo de un corte adecuado, variables E y F tomadas en el filo; y medidas relacionadas con la necesaria flexibilidad del cuchillo, variables A, B y C recogidas de la parte superior de la hoja. Como puede observarse en el apéndice C, los valores que toman las variables E y F son muy similares, mientras que los valores que toman las variables A, B y C dependen de la distancia al mango, tomando valores superiores a medida que nos acercamos a éste.

El número de observaciones disponibles para cada variable es de 216, equidistribuidas a lo largo de una semana de funcionamiento del proceso. De esta forma, aunque no se puede despreciar a priori un comportamiento autocorrelacionado propio del proceso, la existencia de autocorrelación podría atribuirse a la relativa frecuencia de las observaciones muestrales. Aunque no constituya un marco estadístico óptimo para la obtención de información, este planteamiento es habitual en numerosos procesos industriales, sobre todo cuando la producción está concentrada en intervalos de tiempo reducidos.

La siguiente tabla recoge el valor de algunos estadísticos descriptivos de las variables utilizadas:

<b>Tabla 7.1: Estadísticos descriptivos</b>					
	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>E</b>	<b>F</b>
<b>Frecuencia</b>	216	216	216	216	216
<b>Mínimo</b>	1,28	1,08	0,81	0,30	0,31
<b>Máximo</b>	1,36	1,17	0,90	0,41	0,39
<b>Media</b>	1,3294	1,1271	0,8550	0,3488	0,3500
<b>Mediana</b>	1,33	1,13	0,86	0,35	0,35
<b>Desviación Típica</b>	0,01424	0,01744	0,02233	0,02078	0,02118

De la información recogida en la tabla 7.1 hay que resaltar el valor reducido de la desviación típica de las cinco variables. Esta desviación tan pequeña incidirá en la magnitud de cualquier observación anómala tras la tipificación.

A pesar de que los valores de los estadísticos descriptivos de las variables E y F son similares, es conveniente medir ambas dado el menor grosor de la hoja conforme nos alejamos del mango, aunque las diferencias son menores en el filo que en la parte superior de la hoja.

Una vez analizada la información de forma univariante, es necesario llevar a cabo un análisis más exhaustivo que nos permita analizar la relación existente entre las variables y la autocorrelación, analizando su intensidad y signo. En la tabla 7.2 se recogen: en la diagonal principal, los coeficiente de autocorrelación de primer orden; fuera de la diagonal principal, los coeficiente de correlación cruzada; y, entre paréntesis, el p-valor que sirve para comprobar la significación estadística de las correlaciones estimadas.

De los coeficientes de correlación que resultan significativos, hay que destacar la relación positiva existente entre las variables medidas: en el filo de la hoja (E y F), en el extremo del cuchillo (C y E), y la de la variable C con las variables B y F. El resto de correlaciones cruzadas contemporáneas presentan coeficientes relativamente bajos, por lo que no contaminan la posible estructura de relaciones de autocorrelación existentes en el proceso.



Tabla 7.2: Coeficiente de correlación y autocorrelación de orden 1					
	A	B	C	E	F
A	<b>0,463</b>	0,112 (0,1003)	-0,029 (0,6769)	0,031 (0,6543)	-0,045 (0,5133)
B	0,112	<b>0,519</b>	0,256 (0,0001)	0,206 (0,0023)	0,031 (0,6478)
C	-0,029	0,256	<b>0,668</b>	0,304 (0,0000)	0,225 (0,0009)
E	0,031	0,206	0,304	<b>0,633</b>	0,301 (0,0000)
F	-0,045	0,031	0,225	0,301	<b>0,613</b>

Los coeficientes de autocorrelación de la tabla 7.2 son positivos y elevados, incidiendo de forma negativa, como después comprobaremos, en el comportamiento del gráfico de control. Esta autocorrelación positiva, la más frecuente desde un punto de vista práctico, es la peor tratada por las propuestas metodológicas de mejora de los gráficos de control desarrolladas hasta ahora en la literatura.

A continuación, vamos a analizar el comportamiento de los gráficos de control clásicos ante la presencia de autocorrelación muestral, primero siguiendo un enfoque univariante y, posteriormente, ampliando el estudio a una óptica multivariante.

### 7.3. TRATAMIENTO CLÁSICO

En este apartado vamos a analizar el comportamiento de los gráficos de control univariantes clásicos ante información autocorrelacionada, con el apoyo del programa informático Statgraphics Plus 5.1. Para cada una de las variables aparecen recogidos en las figuras 7.2 a 7.21 los gráficos de control Shewhart, EWMA, CUSUM máscara en V y CUSUM Tabular. En estos gráficos, los puntos señalados en rojo marcan observaciones fuera de control (en aquellos puntos situados fuera de los límites), o patrones de comportamiento no aleatorio. Como se observa, existen gran cantidad de observaciones de este último tipo, situación poco frecuente en la práctica, por lo que hemos considerado que debe existir algún elemento que incide en comportamiento anómalo de los gráficos.

Los resultados obtenidos con los gráficos univariantes reflejan gran cantidad de observaciones fuera de control, con independencia de la variable analizada y del gráfico utilizado. Hay que resaltar que esta situación debe ser consecuencia de la elevada autocorrelación existente en todas las variables, situación que queda de manifiesto, ya que este comportamiento errático aparece de forma menos clara en las variables con menor nivel de autocorrelación, variables A y B.

Ante la situación generada por la autocorrelación, va a ser necesario llevar a cabo un tratamiento previo de la información. Para el filtrado de la información hemos considerado las observaciones como la realización de un proceso estocástico y hemos procedido a su modelización mediante un modelo de series temporales (modelos ARIMA).

Gráfico Media para A

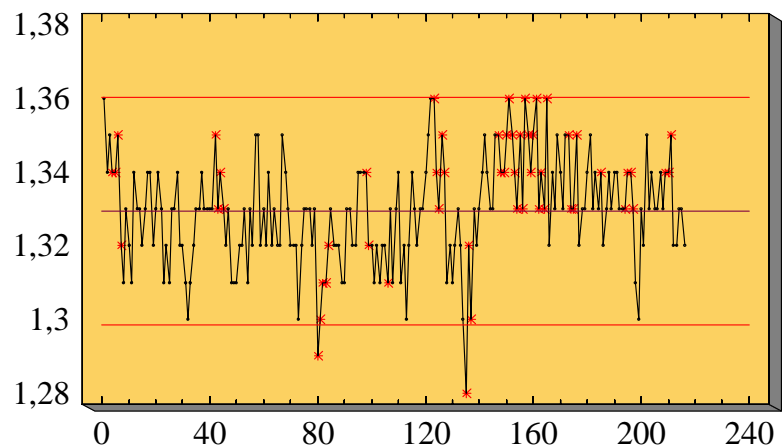


Figura 7.2: Gráfico de control Shewhart para A

Gráfico EWMA para A

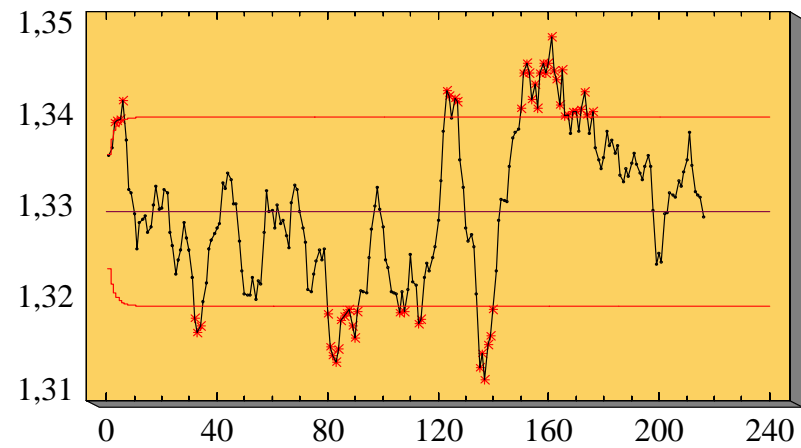


Figura 7.3: Gráfico de control EWMA para A.

Gráfico CUSUM Máscara en V para A

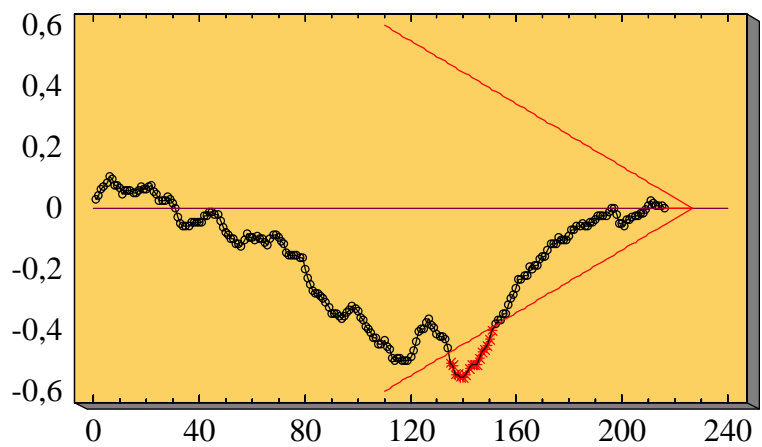


Figura 7.4: Gráfico de control CUSUM máscara en V para A.

Gráfico CUSUM Tabular para A

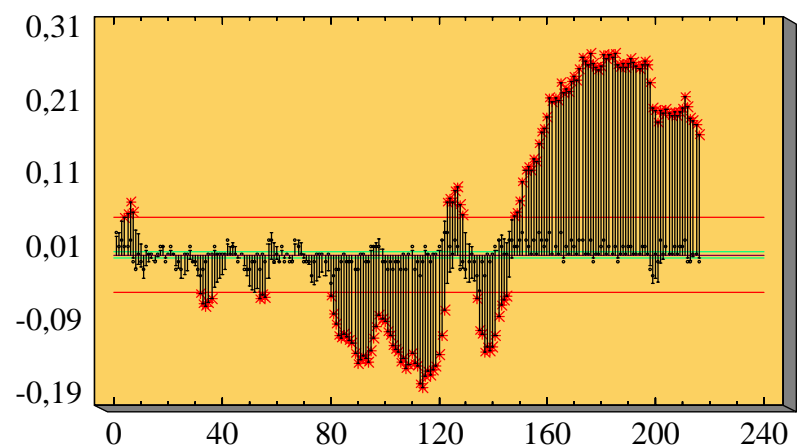


Figura 7.5: Gráfico de control CUSUM tabular para A.

### Gráfico Media para B

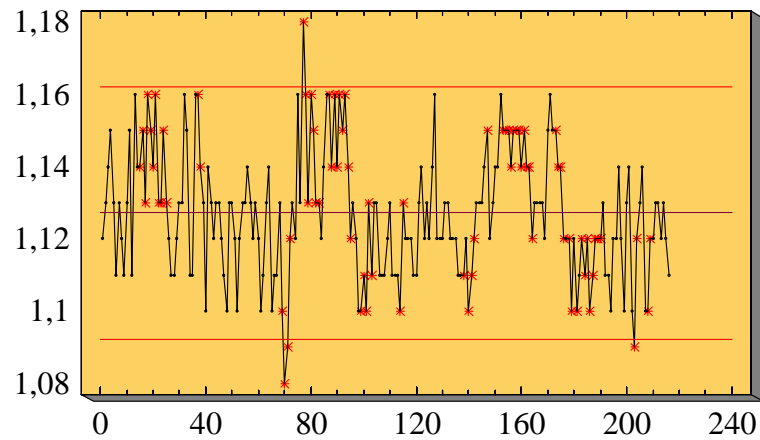


Figura 7.6: Gráfico de control Shewhart para B.

### Gráfico EWMA para B

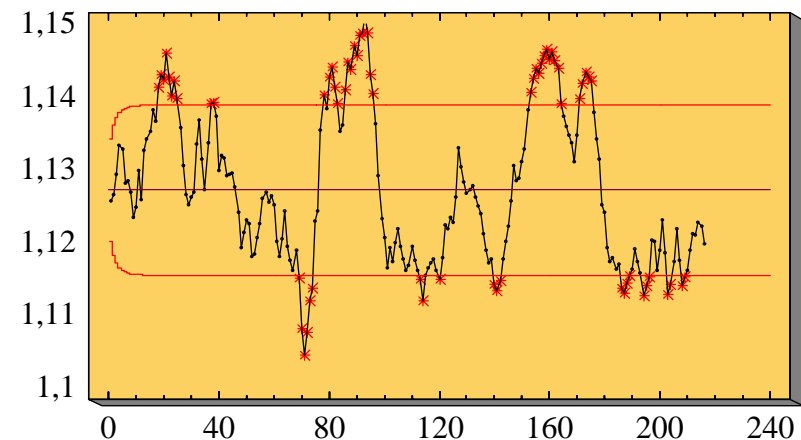


Figura 7.7: Gráfico de control EWMA para B.

### Gráfico CUSUM Máscara en V para B

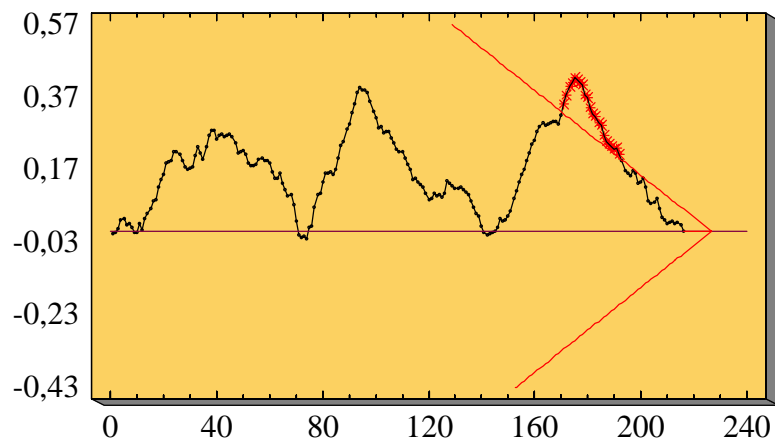


Figura 7.8: Gráfico de control CUSUM máscara en V para B.

### Gráfico CUSUM Tabular para B

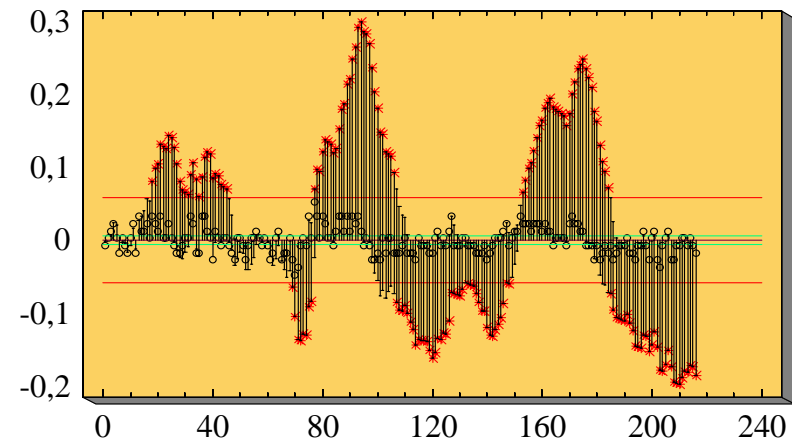


Figura 7.9: Gráfico de control CUSUM tabular para B.

### Gráfico Media para C

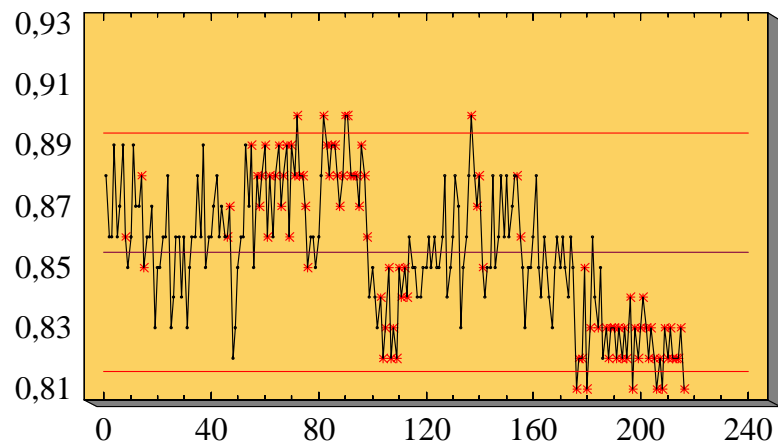


Figura 7.10: Gráfico de control Shewhart para C.

### Gráfico EWMA para C

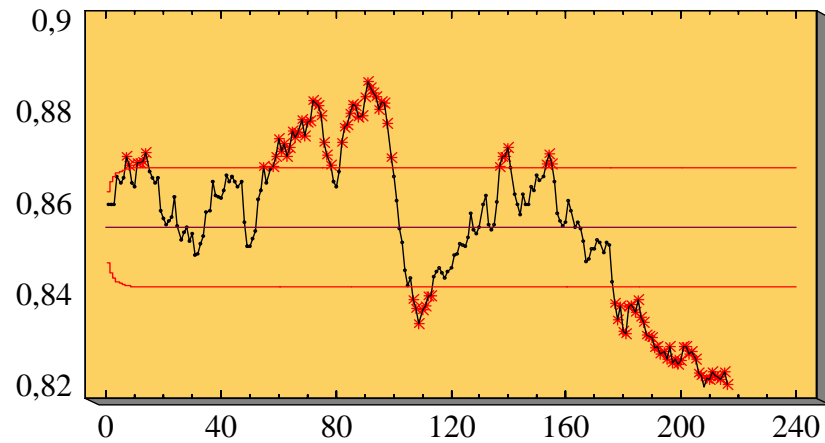


Figura 7.11: Gráfico de control EWMA para C.

### Gráfico CUSUM Máscara en V para C

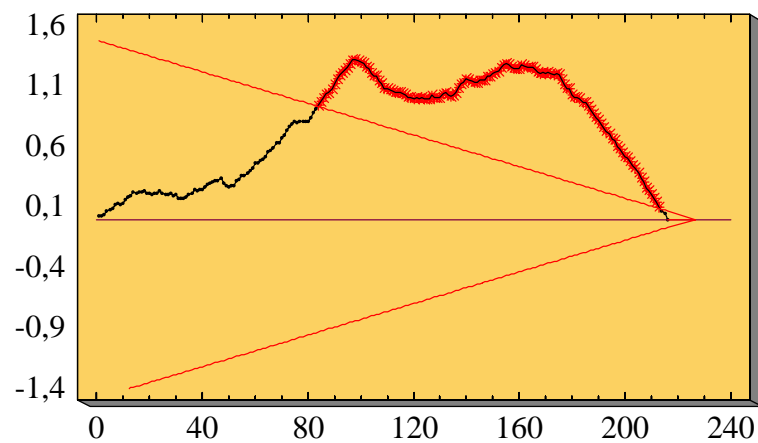


Figura 7.12: Gráfico de control CUSUM máscara en V para C.

### Gráfico CUSUM Tabular para C

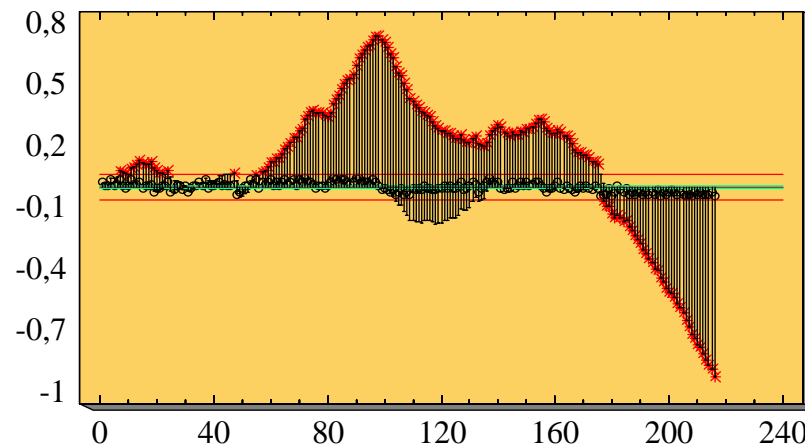


Figura 7.13: Gráfico de control CUSUM tabular para C.

### Gráfico Media para E

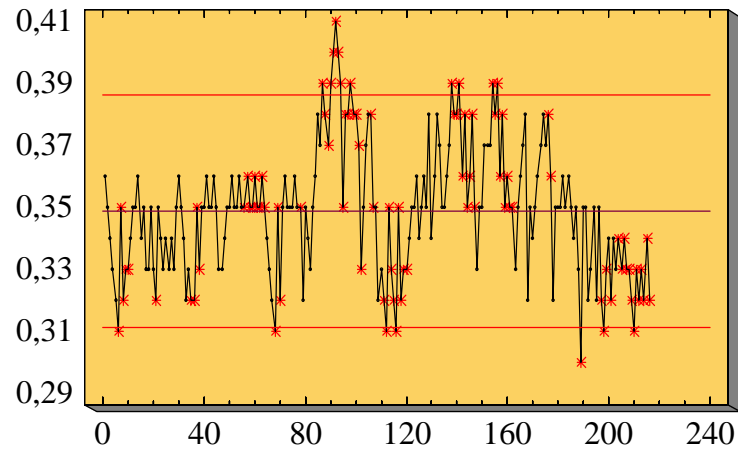


Figura 7.14: Gráfico de control Shewhart para E.

### Gráfico EWMA para E

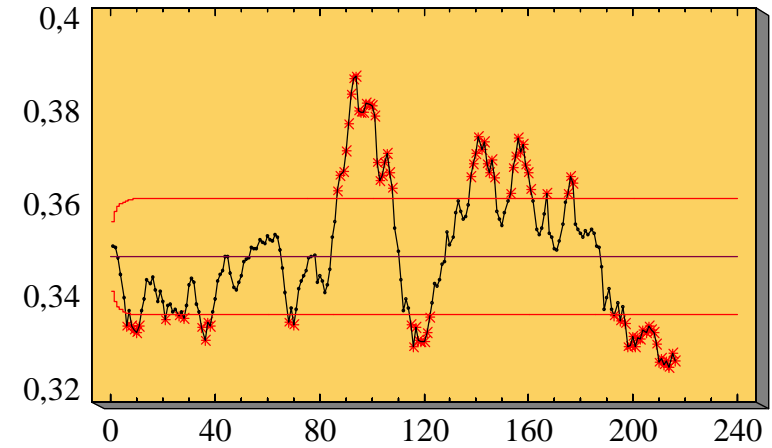


Figura 7.15: Gráfico de control EWMA para E.

### Gráfico CUSUM Máscara en V para E

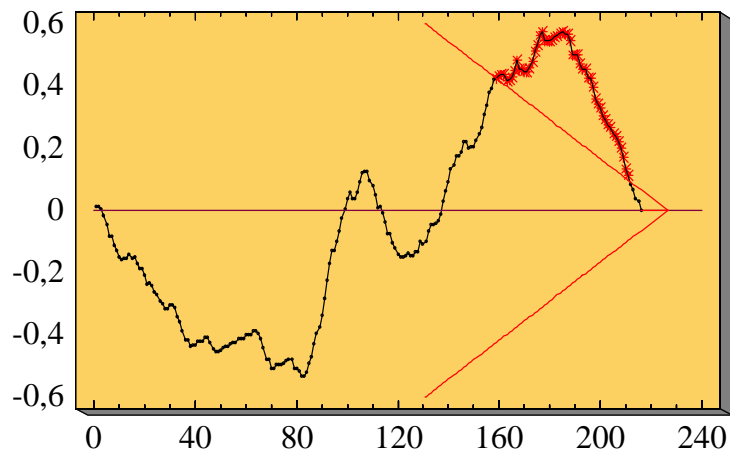


Figura 7.16: Gráfico de control CUSUM máscara en V para E.

### Gráfico CUSUM Tabular para E

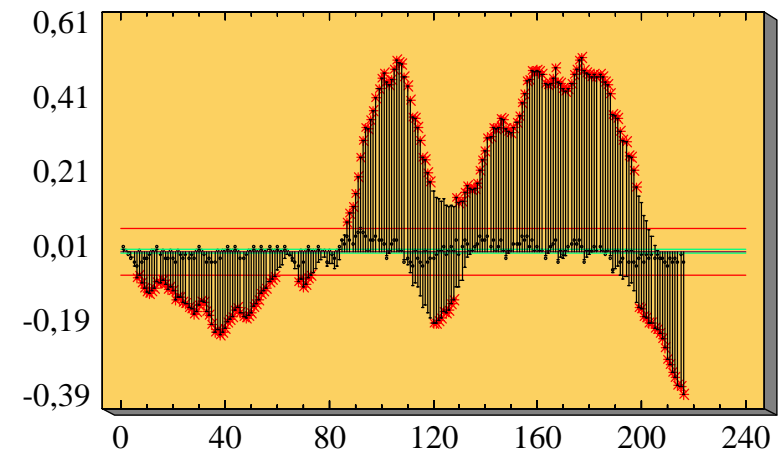


Figura 7.17: Gráfico de control CUSUM tabular para E.

Gráfico Media para F

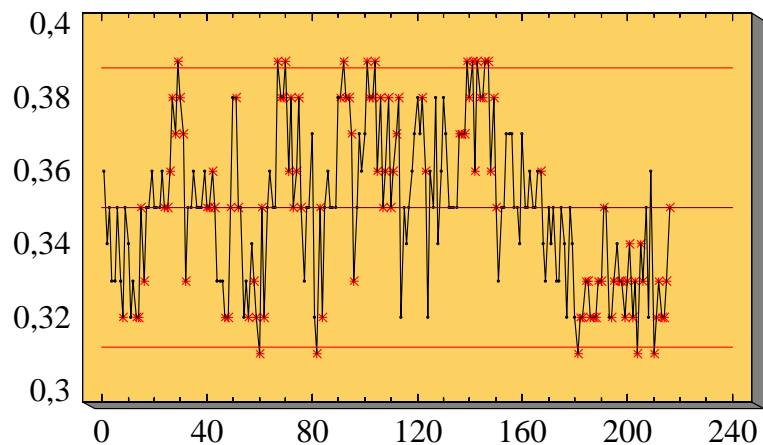


Figura 7.18: Gráfico de control Shewhart para F.

Gráfico EWMA para F

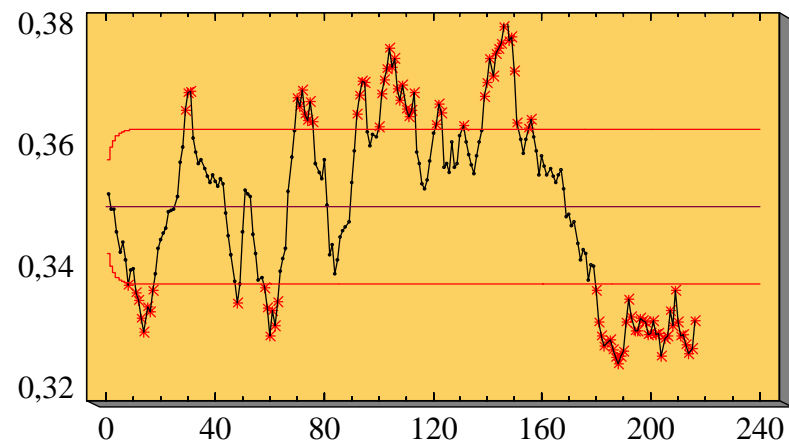


Figura 7.19: Gráfico de control EWMA para F.

Gráfico CUSUM Máscara en V para F

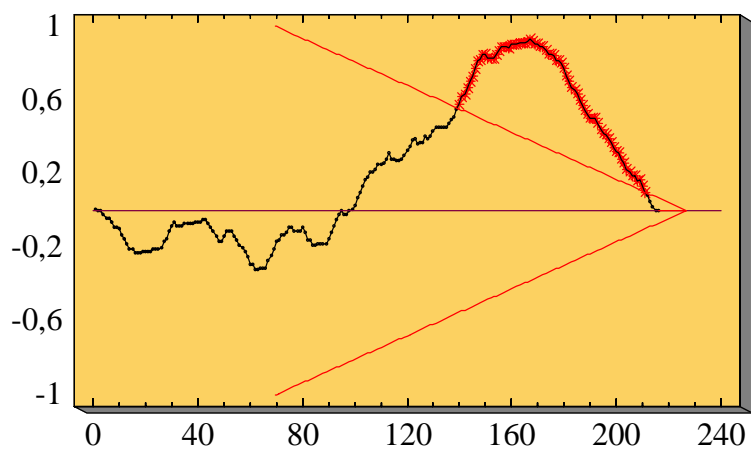


Figura 7.20: Gráfico de control CUSUM máscara en V para F.

Gráfico CUSUM Tabular para F

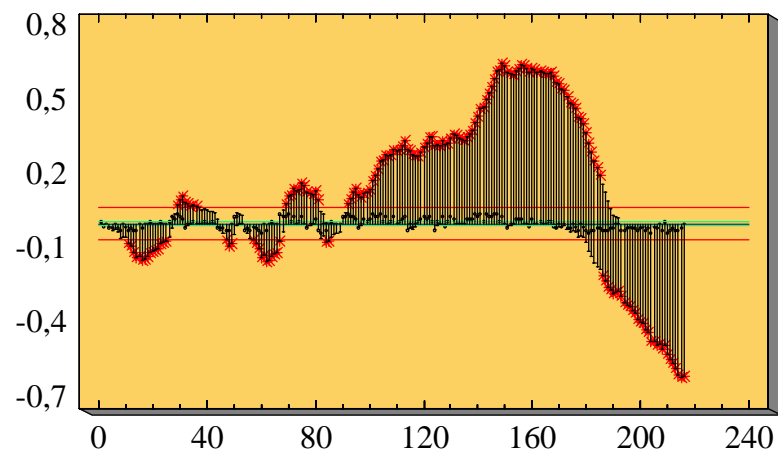


Figura 7.21: Gráfico de control CUSUM tabular para F.

Los residuos procedentes de esta modelización han sido utilizados como input para desarrollar los gráficos de control teniendo en cuenta que, si el ajuste se ha realizado adecuadamente, estos residuos van a ser incorrelados y normalmente distribuidos. En las figuras 7.22 a 7.26 aparecen recogidos los gráficos de control Shewhart para la media de los residuos de cada una de las variables. En el ajuste del modelo de serie temporal nos hemos decantado por un modelo autorregresivo ya que este modelo recoge el comportamiento de la información de forma adecuada<sup>102</sup>.

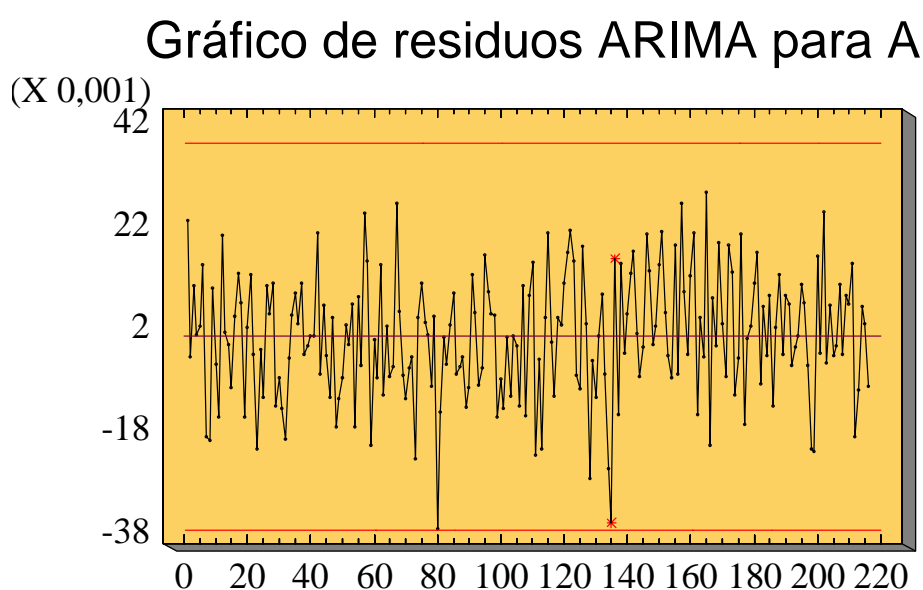


Figura 7.22: Gráfico de control Shewhart para los residuos de A.

Para los residuos de la variable A no existe ninguna observación situada fuera de los límites de control, si bien, existen dos observaciones marcadas como posible presencia de comportamiento no aleatorio. Este resultado difiere del obtenido cuando usamos la información original del proceso, llegando a la conclusión de que el proceso se encuentra bajo control y atribuyendo las anteriores observaciones fuera de control a la existencia de autocorrelación muestral.

---

<sup>102</sup> En unos casos hemos utilizado un modelo AR(1) y en la mayoría un modelo AR(2), si bien, al filtrar todas las variables con un modelo AR(1) las conclusiones no cambian de forma sustancial.



### Gráfico de residuos ARIMA para B

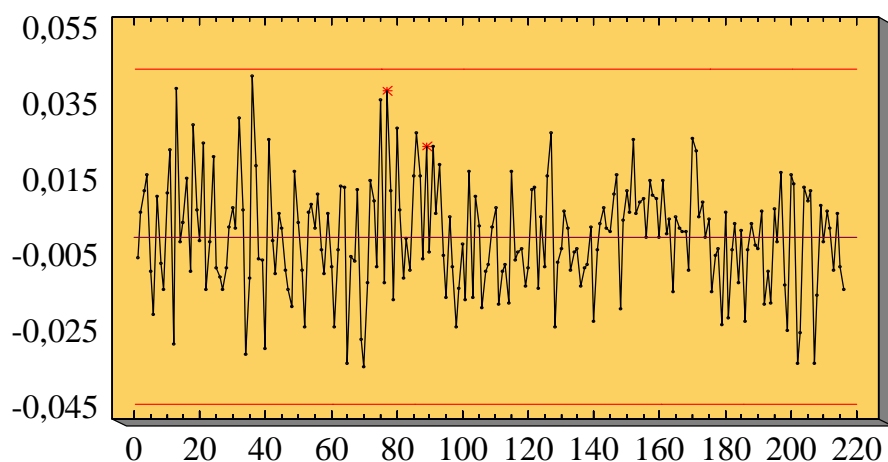


Figura 7.23: Gráfico de control Shewhart para los residuos de B.

### Gráfico de residuos ARIMA para C

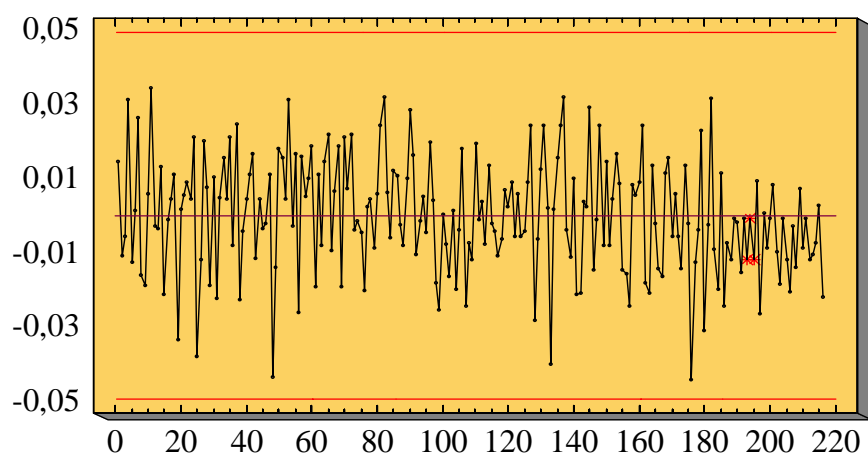


Figura 7.24: Gráfico de control Shewhart para los residuos de C.

En los casos de las variables B y C el proceso también está situado bajo control, ya que no existe ninguna observación que nos marque la existencia de un comportamiento atípico. Para la variable E, como se puede observar a continuación, existe una observación situada fuera de los límites de control, concretamente en este caso se trata de la observación número 168 en la que el residuo toma un valor

de -0,049, mientras que el límite inferior de control toma un valor de  $-0,045^{103}$ . En este caso, la observación fuera de control se corresponde con el mínimo valor del grosor en esa zona del cuchillo, por lo tanto, ese cuchillo no va a cumplir los requisitos establecidos. Al ser sólo una observación no es una situación que deba generar excesiva alarma, ya que se corrige después el comportamiento del proceso.

### Gráfico de residuos ARIMA para E

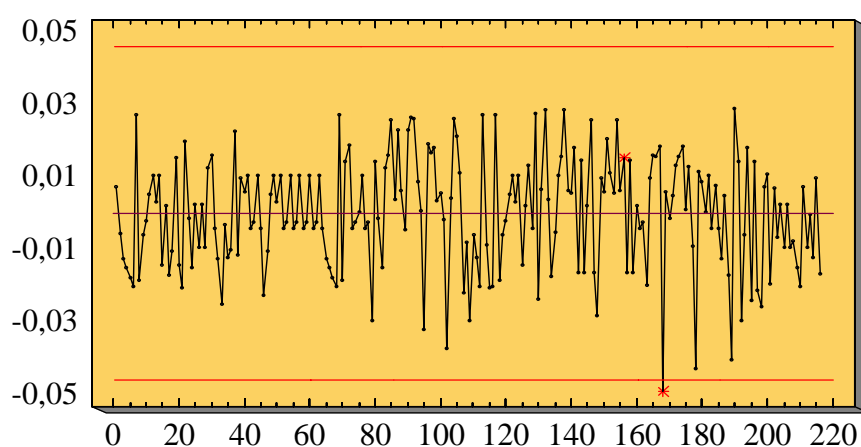


Figura 7.25: Gráfico de control Shewhart para los residuos de E.

Por último, el gráfico de control para los residuos de la variable F, recogido en la figura 7.26, va a presentar un comportamiento bajo control al no existir ninguna observación fuera de los límites. En este caso habría que examinar la observación número 114 dada su ubicación próxima al límite inferior de control, aunque es una situación que después se corrige.

Tras el tratamiento previo de la información, con el ajuste de los modelos autorregresivos correspondientes, el comportamiento de los gráficos de control se encuentra acorde con los resultados esperados. En este caso, nos hemos decantado por los gráficos Shewhart dado que los resultados de los gráficos EWMA y CUSUM no difieren en exceso y, sin embargo, los cálculos necesarios son más numerosos. Los gráficos de control para los residuos no muestran que exista ningún

<sup>103</sup> Hay que tener en cuenta que estamos utilizando un gráfico de control para los residuos y, un valor negativo del límite inferior de control o de alguna observación no es extraño.

indicio, salvo la observación número 168 de la variable E, que nos marque la existencia de una variabilidad fuera de la normal en el grosor de la hoja del cuchillo.

### Gráfico de residuos ARIMA para F

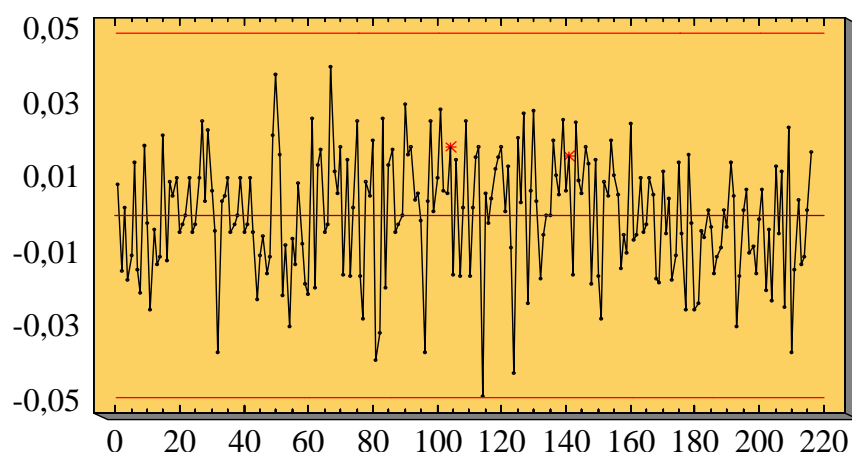


Figura 7.26: Gráfico de control Shewhart para los residuos de F.

Para llevar a cabo un análisis más completo, vamos a aplicar técnicas multivariantes que tengan en cuenta la estructura de correlación entre las variables. En este caso, nos vamos a decantar por la aplicación del gráfico de control  $T^2$  de Hotelling, al constituir una extensión multivariante de los gráficos Shewhart analizados anteriormente. Este gráfico nos va a permitir un análisis más realista mediante la consideración adicional de la estructura de correlación existente entre las variables.

Lo primero que hay que calcular es la distancia  $T^2$ , que nos va a resumir la información multivariante en un estadístico que tiene en cuenta la matriz de varianzas-covarianzas y el vector de valores objetivo, cuyos valores aparecen tabulados en el apéndice C. Es importante resaltar que en la estimación de los parámetros del gráfico de control hemos considerado todas las observaciones

disponibles, de ahí que utilicemos un límite de control<sup>104</sup> fijado mediante una distribución beta, cuya forma es:

$$LSC = \frac{(m-1)^2}{m} \beta_{\alpha, p/2, (m-p-1)/2} \quad (7.1)$$

Una vez realizadas estas consideraciones, la figura 7.27 recoge el gráfico de control  $T^2$  de Hotelling, para las observaciones originales.

### Gráfico de Control $T^2$ de Hotelling

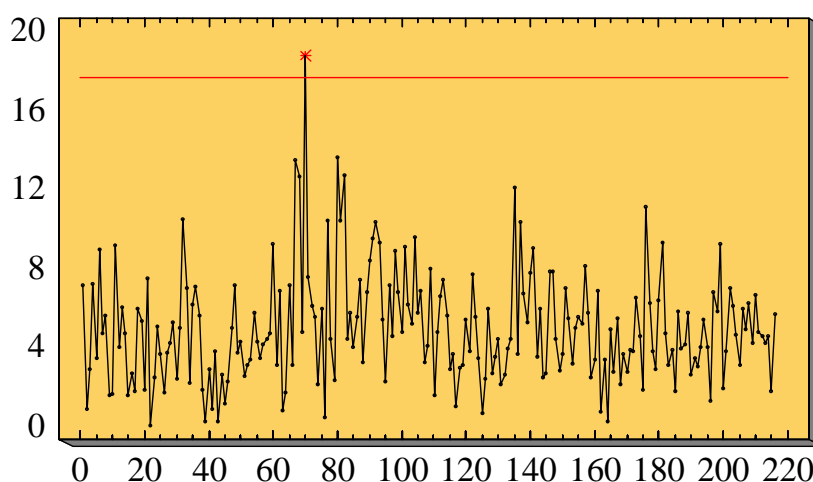


Figura 7.27: Gráfico de control  $T^2$  de Hotelling.

El gráfico de control nos marca la existencia de una observación fuera de control, concretamente la observación número 70, para la que el valor del estadístico es 18,91 frente a un valor del límite de control de 17,6419. Esta situación puede deberse a una observación fuera de control en alguna variable, a una anomalía en la estructura de correlación entre las variables, o bien a la existencia de una falsa alarma.

<sup>104</sup> La justificación de seleccionar esta distribución para el estadístico  $T^2$  aparece recogida en el capítulo 3 de este trabajo y en Tracy, Young y Mason (1992) y Mason y Young (2002).

Si analizamos detenidamente los gráficos univariantes, podemos observar que no existe ningún indicio que nos lleve a pensar en la existencia de esa observación fuera de control, lo que descarta la primera alternativa. La posibilidad de un cambio en la estructura de correlación, aunque no pueda descartarse completamente, parece poco factible dada la debilidad de esta estructura y el comportamiento no sospechoso de los gráficos individuales en dicha observación. Por lo tanto, nos decantamos más hacia la posibilidad de que esta observación fuera de control pueda deberse a una falsa alarma, cuya posible causa sea la existencia de autocorrelación positiva elevada.

De forma análoga al caso univariante, vamos a proceder a tratar la información antes de elaborar el gráfico de control. El tratamiento de la información se puede desarrollar siguiendo dos ópticas: utilizar los residuos procedentes de la modelización de cada variable de forma independiente, o aplicar un modelo de series temporales múltiple, bien enfocado bajo la metodología Box-Jenkins (modelos VAR) o bajo una perspectiva de espacio de los estados.

La primera alternativa consiste en la utilización de los residuos procedentes de ajustar un modelo ARIMA independientemente a cada una de las variables. En este caso, la comparación de las matrices de varianzas-covarianzas de los valores originales y de los filtrados, no se puede concluir que éstas sean claramente distintas. Por ello, hemos optado por utilizar los residuos representados en las figuras 7.22 a 7.27 para desarrollar un gráfico multivariante, recogido en la figura 7.28 siguiente.

### Gráfico de Control T<sup>2</sup> de Hotelling para residuo

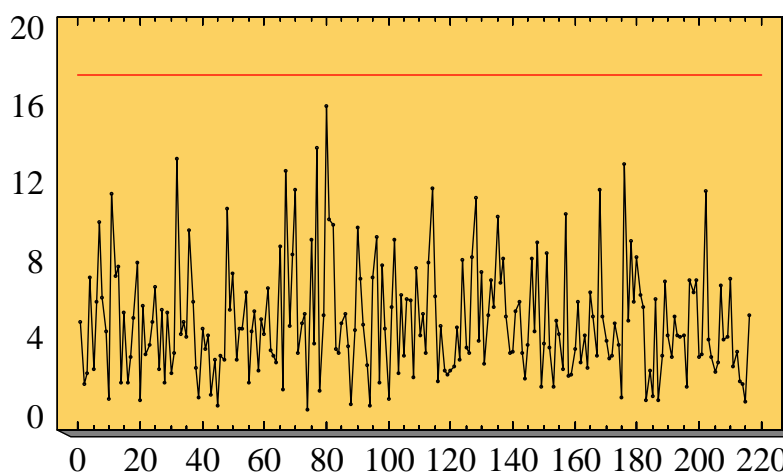


Figura 7.28: Gráfico de control T<sup>2</sup> de Hotelling para residuos procedentes modelización ARIMA de cada una de las variables.

En este gráfico podemos observar que el proceso es considerado bajo control al no existir ninguna observación situada fuera de los límites, avalando la consideración de falsa alarma para la observación número 70 comentada anteriormente.

Una alternativa al procedimiento anterior consiste en la utilización de un modelo de series temporales múltiples. En una primera aproximación nos vamos a decantar por la utilización de un modelo VAR. En la fase de identificación hemos utilizado los criterios de información de Akaike (AIC) y Schwarz (BIC) para determinar el orden del modelo. En este caso, nos hemos decantado por un modelo VAR(1) con valores de los criterios de información de -27,5028 y -27,0324 respectivamente. Si llevamos a cabo un análisis minucioso de la información y resultados obtenidos, podemos observar que se reduce la autocorrelación a niveles casi despreciables (el mayor coeficiente de autocorrelación para los residuos es, en valor absoluto, 0,189). A continuación, la tabla 7.3 recoge los parámetros ajustados del modelo VAR(1), junto con los valores más representativos del comportamiento del modelo:

<b>Tabla 7.3: Resultados estimación modelo VAR(1)</b>					
	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>E</b>	<b>F</b>
<b>A (-1)</b>	0,46035	0,11987	-0,16587	0,03050	-0,09533
<b>B (-1)</b>	0,01384	0,47647	0,09118	0,03593	-0,04699
<b>C (-1)</b>	-0,02699	0,05492	0,65179	0,17113	0,06022
<b>E (-1)</b>	0,01362	0,08065	-0,05204	0,55555	0,11631
<b>F (-1)</b>	-0,00075	-0,01447	0,10093	0,07198	0,56283
<b>C</b>	0,72024	0,36068	0,39803	-0,09767	0,24058
<b>R<sup>2</sup></b>	0,22160	0,29731	0,48060	0,44651	0,39787
<b>R<sup>2</sup> Ajustado</b>	0,20297	0,28050	0,46818	0,43327	0,38347
<b>AIC</b>	-5,88146	-5,55749	-5,37096	-5,44699	-5,32452
<b>BIC</b>	-5,78740	-5,46342	-5,27690	-5,35293	-5,23046
<b>Estadístico F</b>	11,8996 4	17,6855 0	38,67755	33,72060	27,62027
<b>Determinante Covarianza Residuos</b>	5,92 E-19				
<b>AIC</b>	-27,50275				
<b>BIC</b>	-27,03243				

Fuente: Información obtenida usando Eviews 4.

De esta forma, el gráfico de control para los residuos, recogidos en el apéndice C, va a tener la siguiente forma:

## Gráfico de Control T<sup>2</sup> de Hotelling para residuos

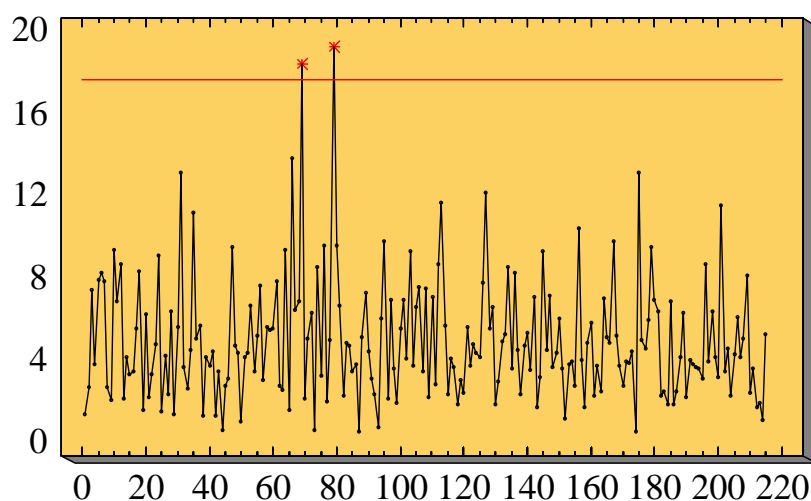


Figura 7.29: Gráfico de control T<sup>2</sup> de Hotelling para los residuos procedentes del ajuste de un modelo VAR(1).

Existen en este caso dos observaciones situadas fuera de control, las observaciones número 70 y 80 cuyos valores del estadístico T<sup>2</sup> son de 18,4305 y 19,217 respectivamente, valores superiores al límite superior de control situado en 17,6402. Para descartar la infraestimación del orden del modelo como causa de la existencia de estos valores anómalos la estimación de un modelo VAR(2) produce un gráfico de comportamiento parecido, con estas dos observaciones fuera de control, y una reducción aún mayor en la autocorrelación entre los residuos (con un valor máximo, en valor absoluto, de 0,053). Este hecho apunta como causa de las salidas de control hacia el mal comportamiento de los gráficos contruidos con residuos de modelos AR ante autocorrelación elevada y positiva, como se reflejó en el capítulo 5 de este trabajo.

A continuación, vamos a desarrollar una alternativa al gráfico anterior consistente en la modelización de la información mediante modelos en espacio de los estados. En este caso, vamos a utilizar las innovaciones de forma similar a los residuos anteriores; además, vamos a utilizar un gráfico de control para los estados cuya valía analizaremos posteriormente.





#### **7.4. UNA NUEVA PROPUESTA BASADA EN MODELOS EN ESPACIO DE LOS ESTADOS**

En este epígrafe vamos a desarrollar un filtrado de la información para eliminar la autocorrelación mediante la aplicación de una modelización en espacio de los estados. Una vez desarrollada vamos a utilizar, por un lado, las innovaciones que juegan un papel similar al de los residuos en la metodología VAR y, por otro, los estados que constituyen un estadístico secuencial que recoge el comportamiento inercial del proceso una vez eliminadas las innovaciones. De esta forma podemos desarrollar una metodología similar a la propuesta por Alwan y Roberts (1988), donde el gráfico de control para las innovaciones nos permita llegar a conclusiones similares a las obtenidas con el gráfico de control para los residuos y el gráfico de control para los estados nos permita analizar el comportamiento general del proceso.

Para poder aplicar esta metodología, la primera elección que ha de hacerse es la dimensión de la matriz de autocorrelaciones, de tipo Hankel, que se pretende aproximar; es decir, se debe determinar cuántos retardos van a considerarse en la modelización y cuál es el horizonte de predicción que se pretende. Un valor demasiado pequeño para cualquiera de estas cantidades puede impedir la correcta elección de la dimensión para el vector de estado, mientras que un valor demasiado grande puede acarrear problemas numéricos y estadísticos que dificulten el análisis. La importancia relativa de ambos parámetros está fijada por la finalidad de la modelización: si se pretende ajustar un modelo a los datos observados, como ocurre en este caso, será conveniente considerar un número de retardos superior o igual al horizonte de predicción, mientras que se aumentará este último si el fin es la predicción.

En este trabajo se ha optado por fijar un horizonte de predicción de tres observaciones, con lo que se puede establecer una relación entre el número de retardos y la cantidad de funciones de autocorrelación que entran en el análisis, que resulta ser  $(N_p + N_f - 1)$ . Para determinar el número de retardos a considerar en el análisis se ha optado por un planteamiento secuencial que, no constriñendo la estimación del número de estados, evite posibles errores muestrales. Para ello, se comparan los valores singulares de las matrices tipo Hankel asociadas a valores consecutivos de  $N_p$ : si en ambos casos se llega a la misma conclusión, se opta por la matriz de menor tamaño; en caso contrario, se repite el proceso hasta que se alcance la condición anterior. Como los valores singulares asociados a tres y cuatro retardos proporcionan la misma estimación, el valor elegido es  $N_p = 3$ .

De esta forma, obtenemos una matriz de tipo Hankel, con quince filas y quince columnas, formada por las matrices de autocorrelación de hasta cinco retardos. Los valores singulares asociados a ésta son:

3.356237193	1.261861529	1.085170827	0.614420168	0.439213690
0.164370584	0.151178454	0.136013364	0.106058349	0.087175989
0.068475056	0.065724140	0.031592097	0.026307890	0.003027964

Para determinar el número de estados que vamos a considerar en nuestro análisis utilizamos el test de Bartlett aplicado sobre la distribución de los coeficientes de correlación canónica. Estos coeficientes de correlación se van a obtener como una transformación de los valores singulares utilizando la matriz de correlación de los vectores  $Y^+$  e  $Y^-$ , como aparece recogido en el apéndice B.

En la tabla siguiente se recogen los valores empíricos del estadístico de Bartlett, junto con los valores críticos correspondientes a un nivel de significación del 5%:

<b>Tabla 7.4: Estadístico de Bartlett</b>			
	Est. de Bartlett	g.l.	Valor crítico
<b>1</b>	488,360	196	229,6632
<b>2</b>	351,6148	169	200,3339
<b>3</b>	232,9057	144	173,0041
<b>4</b>	165,7222	121	147,6735
<b>5</b>	114,5266	100	124,3421
<b>6</b>	72,3552	81	103,0095
<b>7</b>	44,4099	64	83,6753
<b>8</b>	29,9874	49	66,3386
<b>9</b>	19,5187	36	50,9985
<b>10</b>	10,8802	25	37,6525
<b>11</b>	5,7543	16	26,2962
<b>12</b>	1,5333	9	16,9190
<b>13</b>	0,1945	4	9,4877

En este caso, la dimensión seleccionada para el vector de estado es cuatro. Además, el módulo de todos los autovalores de la matriz dinámica  $F$ , así como los de la matriz simpléctica  $(F-GH)$  son inferiores a la unidad<sup>105</sup>, reflejando respectivamente el carácter cíclico de los estados y la ausencia de comportamientos explosivos.

De esta forma, vamos a obtener una nueva serie de innovaciones, que van a constituir el input sobre el que desarrollar los gráficos de control. Estas innovaciones, junto a los estados, van a jugar un papel fundamental en la nueva metodología propuesta en este trabajo. El gráfico de control  $T^2$  de Hotelling para las innovaciones va a constituir una alternativa al gráfico de control de los residuos y aparece recogido en la figura 7.30.

<sup>105</sup> En el caso de la matriz  $F$ , los autovalores toman los siguientes valores: 0.9634, 0.8635, 0.8177, 0.7464. Y en el caso de la matriz simpléctica estos autovalores son: 0.7634, 0.4816, 0.4010, 0.1870.

## Gráfico de Control T<sup>2</sup> Hotelling para innovaciones

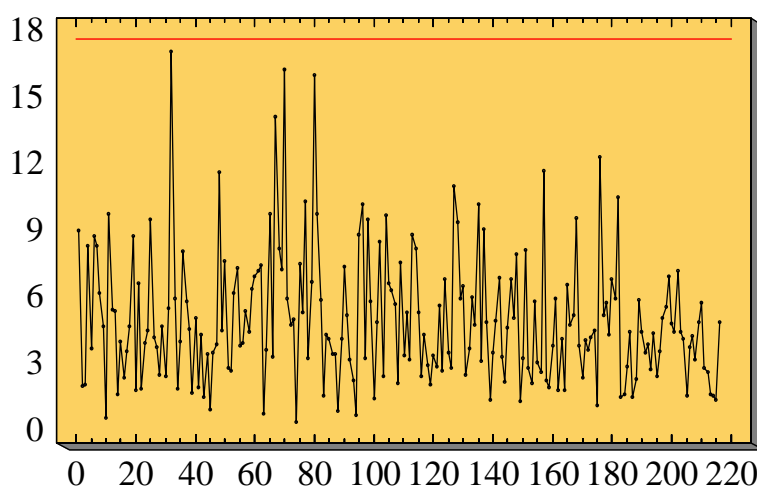


Figura 7.30: Gráfico de control T<sup>2</sup> de Hotelling para las innovaciones.

En el caso de utilizar las innovaciones, las conclusiones van a ser las mismas que las obtenidas con los residuos de la modelización AR independiente de cada variable. Este gráfico de control nos va a confirmar la inexistencia de observaciones fuera de control, situación esperada dado el comportamiento de los gráficos univariantes para los residuos y la falta de un cambio claro en la relación existente entre las variables. En base a estos resultados podemos concluir que el grosor de la hoja del cuchillo, medido en varios puntos, va a estar bajo control y, por lo tanto, estos cuchillos van a presentar un comportamiento de corte adecuado.

Con la aplicación de este gráfico de control en lugar del gráfico para residuos VAR, la empresa consigue una reducción de costes económicos y de tiempo dado que han evitado buscar causas de variación inexistentes.

Una ventaja fundamental de la modelización en espacio de los estados radica en la posibilidad de llevar a cabo un gráfico para los estados. Éste nos va a permitir recoger el comportamiento inercial del proceso y proporciona una visión general del comportamiento del mismo. Además, esta metodología proporciona una reducción de la dimensión (parecida al uso de componentes principales dinámicas), ya que el número de estados va a ser igual o inferior al de variables. En este caso

concreto, la reducción de dimensión no es elevada al tener las variables una estructura de correlación débil.

Para la construcción de un gráfico de control para los estados hay que tener en cuenta que éstos no tienen por qué estar incorrelados, por lo que su interpretación debe ser cuidadosa. Así, el gráfico de control para los estados sólo se alterará ante un cambio momentáneo en la estructura de correlación contemporánea o la aparición de una causa asignable con permanencia temporal. El primer caso debería traducirse en un valor anómalo de magnitud relativamente grande pero de efecto puntual que puede detectarse con un gráfico  $T^2$  de Hotelling, mientras que el segundo se manifestará en una serie consecutiva de cambios. Cuando los cambios puntuales son moderados o predomina la existencia de correlación cruzada el gráfico MEWMA puede ser una alternativa válida.

Construyendo un gráfico de control  $T^2$  de Hotelling para los estados, obtenemos la representación de la figura 7.31 junto a un límite de control situado en 15,8018.

### Gráfico de Control para los Estados

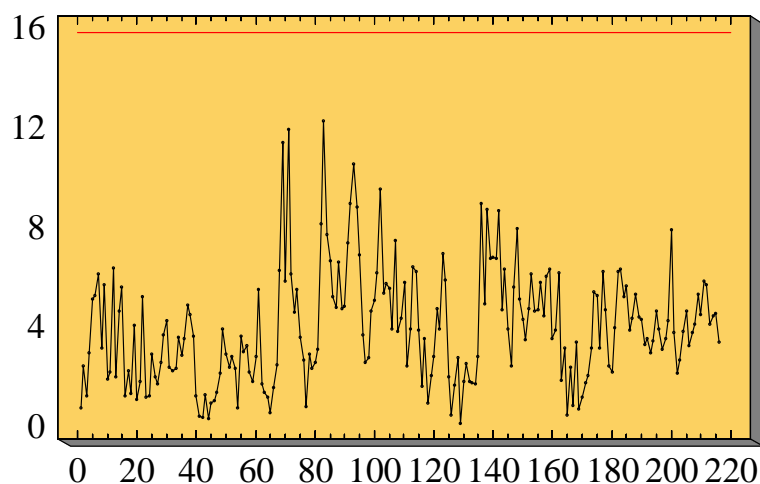


Figura 7.31: Gráfico de control  $T^2$  para los estados.

Este gráfico nos marca el comportamiento general del proceso, con valores relativamente elevados entre las observaciones número 65 y 95, si bien, no lo suficientemente importantes para indicar una situación fuera de control. Este fenómeno ya fue detectado al analizar el gráfico  $T^2$  para las observaciones originales, concretamente en la observación número 70. Con la nueva metodología propuesta, el modelo detecta un valor extraño en la observación número 70 que, en principio, es parcialmente atribuido a una innovación, como recoge el gráfico 7.30. Posteriormente, este efecto es trasladado al gráfico de los estados (observación número 71 en el gráfico 7.31), ya que refleja más un cambio en la estructura inercial subyacente que un comportamiento anómalo puntual, pero no suficientemente grande como para dar una señal de alarma. Este hecho apoya la consideración de falsa alarma hecha en el gráfico  $T^2$  de observaciones.

Las limitaciones del gráfico de control  $T^2$  de Hotelling y la posibilidad de un alto grado de autocorrelación en los estados va a hacer necesario desarrollar un gráfico MEWMA. Éste presentará un ARL menor ante cambios de magnitud media, como los producidos por una causa asignable de duración moderada, y es más robusto ante la presencia de autocorrelación muestral. En este ejemplo vamos a desarrollar dos gráficos MEWMA con valores de  $\lambda$  igual a 0,1 y 0,3, respectivamente.

## Gráfico de Control MEWMA

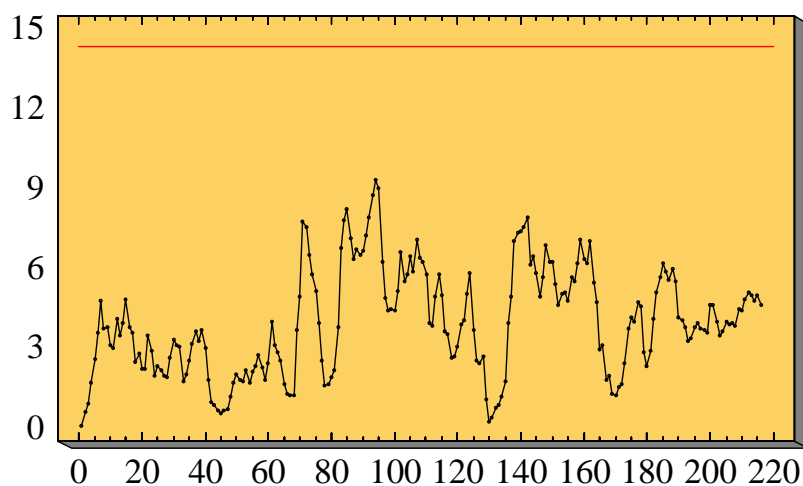


Figura 7.32: Gráfico de control MEWMA para los estados con  $\lambda=0,3$ .

El gráfico de control MEWMA para los estados con un valor lambda de 0,3 nos marca un comportamiento similar al gráfico de control  $T^2$  de Hotelling. En esta ocasión, dada la importancia que le estamos dando al valor actual de las observaciones, el gráfico de control marca una situación bajo control al no superar ningún valor el límite de control situado en 14,34. Además, hay que resaltar que el comportamiento del gráfico es similar al gráfico 7.31 pero con los comportamientos extremos menos pronunciados.

A continuación vamos a analizar el comportamiento del gráfico de control MEWMA con un valor del parámetro lambda de 0,1, es decir, dando una menor importancia a los valores actuales para concentrar la atención en la acumulación procedente de los valores pasados del proceso. El gráfico de control en esta ocasión va a tener la siguiente forma:

### Gráfico de Control MEWMA

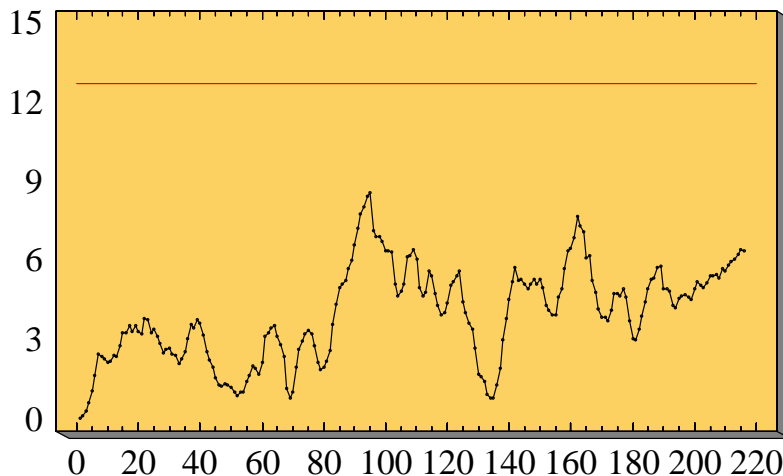


Figura 7.33: Gráfico de control MEWMA para los estados con  $\lambda=0,1$ .

Con este gráfico de control la situación es la misma que en el caso anterior, el proceso se encuentra bajo control ya que, ningún valor supera el límite de control situado en 12,73. Tal y como era de esperar, los picos que, cuando despreciamos la información pasada, aparecían entre las observaciones número 65 y 95 retrasan su aparición hasta las observaciones 86 a 102. La ausencia de observaciones fuera de control avala la interpretación dada en el gráfico de observaciones originales



considerando la observación fuera de control en éste como una falsa alarma aunque considerando que existe una pequeña alteración en el proceso.

Las conclusiones que se han obtenido con los distintos gráficos de control utilizados una vez eliminada la autocorrelación a través de un modelo VAR (residuos) o un modelo en espacio de los estados (innovaciones) son distintas. En la figura 7.34 aparecen recogidos los valores del estadístico  $T^2$  obtenidos para cada una de las alternativas multivariantes analizadas en este trabajo, valores que aparecen tabulados en el apéndice C.

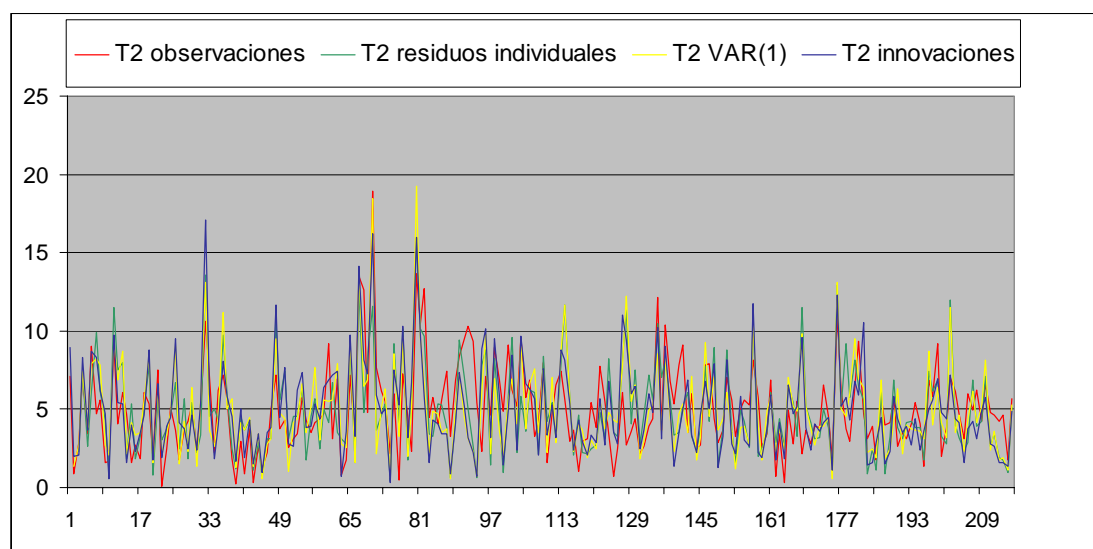


Figura 7.34: Valores del estadístico  $T^2$ .

Esta figura muestra que el comportamiento de los valores  $T^2$  es similar en todos los casos, con pequeñas modificaciones en los valores más extremos. En el caso de los residuos procedentes de la modelización VAR(1) se produce un valor elevado del estadístico en las observaciones número 70 y 80, en la observación 70, el valor  $T^2$  para las observaciones originales está por encima del valor obtenido con los residuos del modelo VAR(1). Por contra, en la observación 80, las innovaciones tienen un valor del estadístico superior al obtenido para las observaciones originales, pero tomando un valor inferior al obtenido con los residuos VAR(1). Esto nos indica que las innovaciones tienen en cuenta la existencia de esta observación, pero no es considerada suficientemente grave como para marcar una

situación fuera de control. Hay que destacar que en la observación número 50 el gráfico de control para las innovaciones marca un pico superior al obtenido con el gráfico de control para los residuos de la modelización independiente de cada una de las variables, y que no era detectado por los residuos procedentes de un VAR(1) ni por el gráfico de control para las observaciones originales.



## 7.5. UNA NUEVA ALTERNATIVA AL GRÁFICO DE CONTROL $T^2$ DE HOTELLING MEDIANTE TRUNCAMIENTOS

Por último, vamos a analizar el comportamiento de la alternativa robusta al gráfico de control  $T^2$  de Hotelling propuesta en este trabajo. Vamos a calcular y comparar el comportamiento de los estimadores clásicos usados en el gráfico  $T^2$  de Hotelling, junto con ciertas aproximaciones robustas bien conocidas como la obtenida utilizando el estimador MVE, dado en Rousseeuw y Croux (1990); el estimador MCD, de Rousseeuw y Van Driessen (1999); y la propuesta desarrollada en este trabajo, que utiliza los estimadores robustos procedentes de la familia de medias truncadas. En este caso vamos a suponer que la información corresponde a la fase I del proceso de elaboración de un gráfico de control y, por lo tanto, debemos utilizar esta información para ajustar unos parámetros que recojan el comportamiento del proceso sin que les afecten las posibles observaciones atípicas.

La construcción del estadístico de control va a responder a la estructura general del gráfico de control  $T^2$  de Hotelling dada en la ecuación (3.6), si bien vamos a sustituir los estimadores clásicos por estimadores robustos que recojan el comportamiento del proceso de una forma más adecuada.

Las estimaciones de posición y escala, de los parámetros poblacionales, obtenidas usando los métodos robustos MCD, MVE y medias truncadas, así como, las estimaciones clásicas aparecen recogidas en la tabla 7.5 <sup>106</sup>.

---

<sup>106</sup> Estas estimaciones han sido obtenidas con las funciones `cov.mve` y `cov.mcd` del paquete estadístico MASS de R 2.0.0 en el caso de las estimaciones MCD y MVE y mediante un algoritmo de estimación desarrollado en Ortega (2002) en el caso de las estimaciones de la familia de las medias truncadas.

Tabla 7.5: Estimaciones de posición y escala					
		Clásico	Trimmed Means	MCD	MVE
Media	A	1,3294	1,3300	1,3303	1,3303
	B	1,1271	1,1280	1,1261	1,1272
	C	0,8550	0,8570	0,8538	0,8541
	E	0,3488	0,3500	0,3476	0,3480
	F	0,3500	0,3500	0,3495	0,3492
Varianza	A	2,0289 E-04	2,1551 E-04	1,7780 E-04	1,7770 E-04
	B	3,0428 E-04	3,3967 E-04	2,6351 E-04	2,8043 E-04
	C	4,9860 E-04	5,9723 E-04	4,7795 E-04	4,7775 E-04
	E	4,3168 E-04	4,9170 E-04	3,8341 E-04	3,8906 E-04
	F	4,4837 E-04	5,9003 E-04	4,1939 E-04	4,1505 E-04
Covarianza	A-B	2,8032 E-05	3,7662 E-05	5,0664 E-05	4,5081 E-05
	A-C	-9,0698E-06	-1,9877E-06	1,5851 E-05	1,1769 E-05
	A-E	9,0676 E-06	6,2770 E-06	2,2313 E-06	-2,1607E-06
	A-F	-1,3488E-05	-3,0339E-05	-2,6336E-05	-2,6157E-05
	B-C	1,0000 E-04	1,0966 E-04	8,2940 E-05	9,0811 E-05
	B-E	7,5267 E-05	8,9133 E-05	4,4993 E-05	5,5321 E-05
	B-F	1,2558 E-05	6,6954 E-06	1,5866 E-05	1,5890 E-05
	C-E	1,4116 E-04	1,4102 E-04	1,3739 E-04	1,4435 E-04
	C-F	1,0651 E-04	1,0483 E-04	1,0811 E-04	1,0718 E-04
	E-F	1,3256 E-04	1,2659 E-04	9,9659 E-05	9,8847 E-05

Los estimadores de posición y escala procedentes de la familia medias truncadas se construyen mediante la aplicación de ciertos niveles de truncamientos sobre los datos, determinados según la propuesta recogida en Ortega (2002). En este caso, para la construcción del estimador de posición los niveles de truncamiento utilizados son;  $\tau_1=0$ ,  $\tau_2=45,37$ ,  $\tau_3=40,74$ ,  $\tau_4=24,07$  y  $\tau_5=0$  para las variables A, B, C, E y F, respectivamente. Como se puede observar, estos niveles de truncamiento son más elevados para la variable B y C, llegando en estos casos a utilizar como estimador de posición valores más próximos a la mediana que a la media de la distribución.

En el caso de los estimadores de escala, los niveles de truncamiento para la varianza de cada variable, y la covarianza entre variables vienen recogidos en la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4,63 & 0 & 0,46 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,46 & 0 & 14,81 & 0,46 \\ 0 & 0 & 0 & 0,46 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

Estos niveles de truncamiento toman valores más bajos que en el caso de las medidas de posición, concretamente el valor más alto es de 14,81 y es el nivel de truncamiento utilizado en la estimación de la varianza de la variable E.

Hay que destacar que las estimaciones de posición y escala recogidas en la tabla 7.5 son similares; así, no aparecen grandes diferencias en el uso de las medidas clásicas respecto a las robustas, ni tampoco entre estas últimas. En el caso de las estimaciones derivadas de la familia de las medias truncadas, la poca o nula diferencia puede deberse a que no hay contaminaciones o no son suficientemente determinantes.

La figura 7.33 recoge una comparación de los resultados de aplicar  $T^2$  y  $T_R^2$ , junto al límite de control para ambas medidas de valor 17,65, calculado mediante la distribución recogida en 7.1 a un nivel de significación de 0,0027.

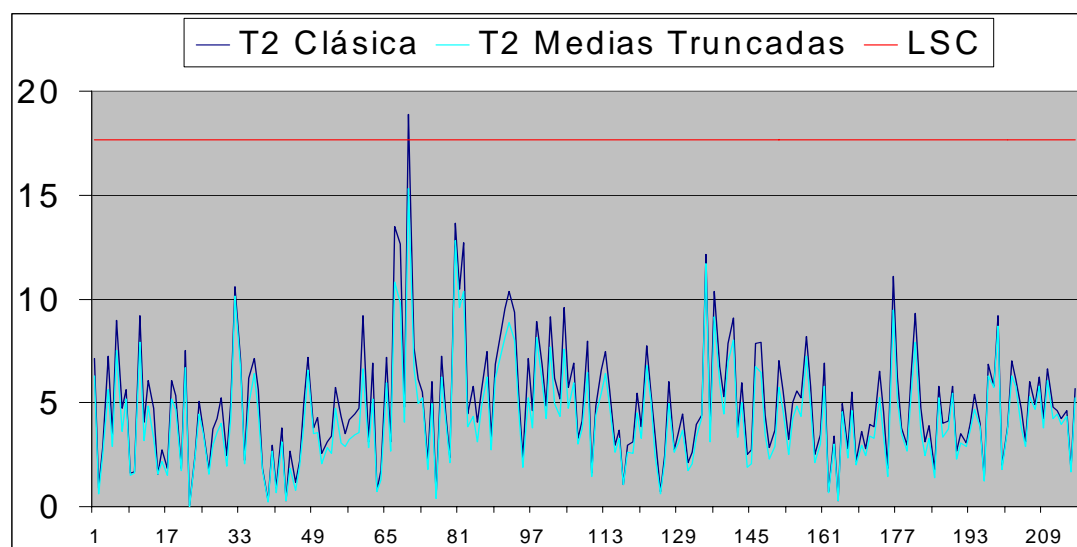


Figura 7.33: Gráfico de control  $T^2$  de Hotelling y  $T_R^2$

En esta figura podemos observar que en el caso de la medida clásica existe una observación situada fuera de control, que se corresponde con la observación número 70; por contra, en el caso de utilizar métodos robustos, si bien, el comportamiento del estadístico es paralelo al comportamiento en el caso clásico, no existe ninguna observación situada fuera de los límites de control. Esto supone que el ajuste de los parámetros del gráfico de control mediante métodos robustos nos va a llevar a la obtención de un comportamiento bajo control en la fase I y, por lo tanto, va a ser posible extrapolar estas estimaciones a la fase II sin necesidad de desarrollar tediosos cálculos iterativos.

Con este nuevo gráfico de control hemos conseguido unas estimaciones en la fase I protegidas de las observaciones atípicas (fuera de control) encontradas en esta fase. De esta forma, hemos conseguido evitar desarrollar cálculos iterativos y obtener unas estimaciones centradas en el grosor de la información, sin tener en cuenta la influencia de observaciones extremas.

## 7.6. COMPARACIÓN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En síntesis, los resultados obtenidos coinciden con las expectativas iniciales de encontrarnos un proceso bajo control estadístico. Concretamente, con el desarrollo de los gráficos de control univariantes se pudo observar la gran influencia del comportamiento autocorrelacionado en los gráficos de control clásicos. Esta influencia queda de manifiesto de una forma más clara con los gráficos univariantes dado el comportamiento errático de los mismos. Además del comportamiento errático marcado por el gran número de observaciones situadas fuera de los límites de control en el gráfico Shewhart, este comportamiento aparece de forma más latente en el comportamiento de los gráficos EWMA y CUSUM, al ser gráficos desarrollados para detectar pequeños cambios. Como consecuencia, ha sido necesario tratar previamente la información para eliminar esta autocorrelación y recoger de forma fehaciente el comportamiento del proceso. Para filtrar la información hemos considerado el ajuste de modelos autorregresivos y posterior utilización de los residuos para llevar a cabo el control de la calidad. En esta nueva situación, los gráficos de control presentan un comportamiento más correcto marcando una situación bajo control para todas las variables, con la excepción de una observación situada fuera de control en la variable E que no debe preocupar en exceso dado que es una situación esporádica que se corrige en las observaciones sucesivas.

De forma análoga al trabajo desarrollado desde un punto de vista univariante, ha sido aplicado el gráfico de control  $T^2$  de Hotelling sobre la información original y sobre los residuos obtenidos una vez filtrada la información. En este caso, el gráfico de control desarrollado sobre las observaciones originales marca una observación situada fuera de control, la observación número 70. Esta situación no parece muy lógica dado el comportamiento de los gráficos de control univariantes, optando por considerarla como una anomalía producida por la existencia de autocorrelación positiva elevada entre las variables. Para solventar este problema



hemos utilizado tres alternativas: considerar los residuos individuales del ajuste a cada una de las variables de un modelo autorregresivo, la modelización de la información mediante un modelo de vectores autorregresivos, y la utilización de un modelo en espacio de los estados.

En el primer caso, el comportamiento del gráfico de control se sitúa más acorde con lo esperado en base al análisis previo de la información. No existe ninguna observación fuera de control, y además, debe recoger de forma correcta el comportamiento de las observaciones. En la segunda alternativa para filtrar la información, hemos optado por un modelo VAR frente a un VARMA o BVAR dado que es más sencillo de determinar y cumple los objetivos perseguidos de forma correcta. Concretamente, en este caso nos hemos decantado por un modelo VAR(1), dado que es el modelo con un mejor comportamiento en términos de los criterios de información AIC y BIC. El gráfico de control elaborado con los residuos de este modelo marca la existencia de dos observaciones fuera de control. Para explicar esta situación, hemos descartado la incorrecta selección del orden del modelo al comparar los resultados con un VAR(2), llegando a la conclusión de que puede ser consecuencia del comentado comportamiento inadecuado del gráfico  $T^2$  de Hotelling para residuos VAR ante una autocorrelación positiva alta.

La última alternativa consiste en la utilización de un modelo en espacio de los estados para filtrar la información. Éste nos permite eliminar la autocorrelación y reducir la dimensión del estadístico muestral utilizado si bien, en esta aplicación, la reducción de la dimensión es escasa dada la poca correlación existente entre las variables. El gráfico de control para las innovaciones nos marca que no existe ninguna observación fuera de control, aunque reconoce la existencia de un comportamiento extremo en la observación número 70. Posteriormente, este efecto es trasladado al gráfico de los estados (observación número 71 en el gráfico 7.31), ya que refleja más un cambio en la estructura inercial subyacente que un comportamiento anómalo puntual, pero no suficientemente grande como para dar una señal de alarma

Hay que destacar el gráfico de control para los estados, que recoge el comportamiento general del proceso. Éste marca ciertos picos en algunas observaciones, sin embargo, a medida que avanza el proceso de producción, el comportamiento de las observaciones tiende a estabilizarse. Sin duda, la utilización de una modelización en espacio de los estados constituye una alternativa válida a los desarrollos existentes permitiendo, además del filtrado de la información, el uso de un enfoque similar al desarrollado por Alwan y Roberts (1988) complementando el análisis de las innovaciones (residuos) con un gráfico de estados que recoge el comportamiento general del proceso.

De los gráficos analizados en esta aplicación, el gráfico de las innovaciones presenta un comportamiento más adecuado, ya que estas innovaciones carecen de autocorrelación y registran un comportamiento coherente con la situación marcada por los gráficos univariantes. Además, hay que tener en cuenta que a diferencia del gráfico de control de los residuos de la modelización independiente de cada variable, en este caso el filtrado de la información se ha desarrollado teniendo en cuenta la estructura de correlación de las variables.

En cuanto a la aplicación de métodos robustos destacar que la utilización de estos métodos de estimación va a permitir ajustar el comportamiento del proceso de forma veraz sin necesidad de desarrollar tediosos cálculos iterativos. Con la aplicación de estos métodos hemos conseguido obtener unas estimaciones que no se ven afectadas por observaciones atípicas y, por lo tanto, recogen el comportamiento del proceso sin verse afectadas por este tipo de observaciones.

Por último, destacar que en términos generales podemos considerar que el comportamiento del proceso se encuentra bajo control. Esta situación queda de manifiesto de una forma más clara una vez filtrada la información, si bien, la observación número 70 nos marca una situación extrema a tener en cuenta; aunque este comportamiento no parece ser preocupante dado que tiende a estabilizarse.



## **CAPÍTULO 8**

### **CONCLUSIONES Y LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURA**

Para finalizar este trabajo de investigación vamos a exponer las principales conclusiones que se pueden extraer de los capítulos precedentes, para acabar dando una escueta visión de las posibles líneas de investigación que quedan abiertas.

#### **8.1. CONCLUSIONES**

##### **a) Interés de los gráficos de control**

Cada día existe una mayor preocupación por intentar elaborar productos que alcancen un nivel de calidad satisfactorio, debido al aumento de la competencia existente, que junto con la poca flexibilidad existente vía precios, lleva a las empresas a buscar la diferenciación vía calidad. Este hecho ha favorecido la

aparición y el uso de un conjunto de técnicas estadísticas enfocadas al control y aseguramiento de la calidad. Estas técnicas suelen ser englobadas en dos grandes grupos, las relacionadas con el control estadístico del proceso (en inglés, statistical process control, SPC u on-line quality control) y las relacionadas con el control estadístico de diseño (off-line quality control). Este trabajo se ha centrado en el estudio del primer gran grupo de técnicas, formadas fundamentalmente por los gráficos de control.

Estos gráficos de control se han convertido en un elemento muy importante en el control de la calidad de los productos a lo largo del proceso de producción de los mismos. Estos gráficos se sustentan en dos suposiciones básicas: independencia y normalidad cuyo incumplimiento va a afectar de distinta forma al comportamiento del gráfico de control. En este trabajo hemos abordado el comportamiento de los gráficos de control clásicos ante el incumplimiento de estas hipótesis, proponiendo alternativas que presentan un mejor comportamiento en ausencia de independencia entre las observaciones.

### **b) Gráficos de control clásicos**

Hemos abordado el control estadístico de procesos en un contexto univariante, es decir, cuando la «calidad» viene medida a través de una única característica. En concreto, hemos establecido las condiciones básicas de los llamados gráficos de control Shewhart, basados en las suposiciones de normalidad e independencia estadística de las observaciones. Como ventajas fundamentales de este planteamiento hemos destacado: el carácter intuitivo de la construcción de los límites de control basados en la regla “3F”, la existencia de un conjunto de reglas adicionales (reglas WECO) que mejoran la detección de anomalías en el proceso y la facilidad en el estudio de la potencia de los contrastes mediante el desarrollo de la curva característica operativa y de la longitud media de racha (ARL). Se han analizado también las características básicas de los gráficos de sumas acumuladas (CUSUM) y de medias móviles exponencialmente ponderadas (EWMA). Éstos, se diferencian de los gráficos Shewhart en que: son más eficientes en la detección de

cambios de pequeña magnitud, van a perder potencia en la detección de cambios de cierta magnitud; y utilizan la información pasada del proceso<sup>107</sup>. Además, hay que tener en cuenta que en los gráficos Shewhart no existe manipulación en las observaciones, esto va a permitir utilizar controladores adicionales que permitan determinar la existencia de cierta tendencia en las observaciones. Por contra, en los otros dos casos existe una manipulación en las observaciones que va a hacer que ante la existencia de cierta tendencia tengamos que determinar si proviene de la información original o es consecuencia de la manipulación llevada a cabo

Posteriormente, hemos analizado la extrapolación de los distintos gráficos de control al ámbito multivariante, estudiando las características técnicas de los gráficos  $T^2$  de Hotelling, MCUSUM y MEWMA, extensiones multivariantes de los gráficos Shewhart, CUSUM y EWMA. Aparte de los problemas existentes en el caso unidimensional, el uso e interpretación de los gráficos multivariantes se ve alterado por nuevos problemas, como puede ser la correlación cruzada, la reducción de la dimensionalidad o el tratamiento multidimensional de la autocorrelación.

### **c) Robustez de los gráficos clásicos**

Esta robustez ha sido enfocada desde dos puntos de vista: comportamiento de los gráficos de control ante el incumplimiento de las hipótesis de partida y consecuencias producidas por la aparición de observaciones atípicas. En el primer caso, ha sido ampliamente abordado en este trabajo el comportamiento de los gráficos de control ante la presencia de autocorrelación en las observaciones (ausencia de independencia), considerando que el incumplimiento de la suposición de normalidad no va a tener graves efectos, salvo ante situaciones extremadamente no normales.

---

<sup>107</sup> Los gráficos CUSUM mediante el cálculo de sumas acumuladas, y los gráficos EWMA mediante la determinación de medias móviles exponencialmente ponderadas donde el peso de la información pasada depende del valor  $\lambda$  que seleccionemos.

El efecto de la presencia de observaciones atípicas en la fase I de elaboración de un gráfico de control ha sido abordado en el Capítulo 4 mediante el desarrollo de un gráfico de control alternativo utilizando estimadores de los parámetros que presentan un comportamiento robusto ante este tipo de observaciones. Esta robustez en la estimación va a suponer una reducción en los cálculos al no tener que desarrollar tediosos cálculos iterativos en la fase I para la obtención de una estimación correcta de los parámetros. Es muy importante destacar la diferenciación entre fase I y fase II en la elaboración de un gráfico de control, ya que si utilizamos métodos robustos en la fase II podemos ocultar la posible presencia de alguna observación situada fuera de control. Se trata de un método alternativo que, mediante la utilización de la familia de estimadores denominada medias truncadas, permite obtener estimaciones de los parámetros en la fase I de una forma más rápida y eficiente.

#### **d) Problemas ante la existencia de autocorrelación**

Como ha sido puesto de manifiesto, el supuesto más restrictivo en la elaboración de un gráfico de control es la independencia estadística de las observaciones muestrales. Los nuevos métodos de obtención de la información hacen posible la obtención de gran cantidad de información en intervalos de tiempo reducido, esta situación va a incidir en la presencia de autocorrelación muestral. Por ello, hemos analizado con más detalle las alternativas surgidas para el control estadístico de procesos con datos no independientes. En este sentido, hemos analizado las dos alternativas propuestas en la literatura especializada consistentes en: la utilización de límites de control empíricos; y la modelización de la información mediante modelos de series temporales. Si bien, nos hemos decantado por la opción consistente en la modelización de la información y uso posterior de los residuos para llevar a cabo el control de la calidad.

En el Capítulo 5 hemos recogido las principales propuestas llevadas a cabo en el tratamiento de la autocorrelación con modelos de series temporales, si bien, todas tienen un aspecto en común que es el enfoque univariante utilizado. Estas

propuestas se han basado en la modelización de la información mediante el modelo ARIMA<sup>108</sup>. En caso de tener varias variables se procede a la modelización de forma independiente de cada una de ellas y posteriormente se unen los residuos. Este enfoque presenta algunos problemas entre los que destacan: comportamiento pobre ante la presencia de autocorrelación positiva (sin duda, la más frecuente en control de la calidad), salvo que esta autocorrelación sea muy fuerte y pérdida de la óptica multivariante al modelizar cada una de las variables de forma independiente. Ante estos problemas hemos analizado la modelización de la información mediante modelos de series temporales multivariantes, destacando los modelos: VAR, BVAR y la nueva propuesta desarrollada en este trabajo con la modelización en espacio de los estados.

#### **e) Tratamiento multidimensional de la autocorrelación**

Para llevar a cabo el tratamiento de la información cuando ésta tiene una naturaleza multivariante, va a ser necesario desarrollar la aplicación de modelos multivariantes de series temporales. Con estos modelos de series temporales vamos a conseguir eliminar la autocorrelación existente en la información sin perder la óptica multivariante inmersa en la misma. Para llevar a cabo este tratamiento hemos analizado la utilización de los denominados modelos VARMA o en su vertiente con restricciones bayesianas BVAR. Igual que ocurría en el caso univariante el modelo más utilizado es el modelo VAR, ya que, tanto en los modelos VARMA como BVAR el proceso de estimación de los parámetros se complica. El principal problema de los modelos VAR es el gran número de parámetros que hay que estimar para ajustar de forma adecuada el modelo a la información, junto a que, igual que ocurría con los modelos AR suelen presentar un comportamiento pobre cuando en las observaciones existe autocorrelación positiva.

---

<sup>108</sup> Más concretamente, lo habitual es utilizar un modelo AR, dado que este modelo suele recoger el comportamiento de las observaciones de forma adecuada y es un modelo menos complejo y más sencillo de estimar al eliminar la parte correspondiente a las medias móviles.



Ante este problema, en este trabajo hemos propuesto la utilización de los modelos en espacio de los estados, modelos que nos van a permitir alcanzar un doble objetivo: por un lado, la eliminación de la autocorrelación y, por el otro, la reducción de la dimensión cuando el número de variables es elevado. Además, estos modelos van a presentar un comportamiento mejor ante la presencia de autocorrelación positiva.

#### **f) Ventajas de la modelización en espacio de los estados**

Uno de los grandes inconvenientes de la modelización VARMA es la gran cantidad de parámetros involucrados, hasta en modelos relativamente sencillos y, más concretamente, la necesidad de una muestra lo suficientemente amplia como para poder estimarlos con cierta garantía<sup>109</sup>. Para solventar tal problema se han propuesto estrategias para limitar la cantidad de parámetros fijando alguno de ellos como: la metodología VAR con restricciones, la metodología VAR con restricciones bayesianas en el comportamiento de los parámetros (BVAR) o buscar alguna representación “canónica” más reducida.

Dentro de la metodología en espacio de los estados, las propiedades de controlabilidad y observabilidad garantizan, bajo supuestos poco restrictivos, la minimalidad de la representación. Esta propiedad presenta dos grandes ventajas: por un lado, si el algoritmo de especificación de un modelo en espacio de los estados proporciona la controlabilidad y observabilidad del sistema se tiene garantizada la menor dimensión para el vector de estados que recoge la dinámica del proceso. Por otro lado, si se trabaja con modelos VARMA, se puede obtener una representación “canónica” alternativa mediante la re-expresión del modelo estimado en espacio de los estados.

---

<sup>109</sup> Este número elevado de observaciones no es una situación que aparezca con asiduidad en control estadístico de la calidad.

De esta forma, conseguimos ajustar un modelo con un número de parámetros involucrados inferior a los necesarios en una modelización VARMA y además, podemos afirmar que esta representación cumple el requisito de minimalidad.

Sin embargo, la gran novedad de la metodología propuesta radica en el análisis de las variables de estado. Como hemos comentado a lo largo de este trabajo, existen casos donde la sola eliminación de la autocorrelación no es apropiada, siendo necesario analizar el comportamiento general del proceso y no sólo por la importancia de la estructura de correlación. Una causa asignable cuyos efectos sean relativamente persistentes puede no ser eficientemente detectada ya que, por el propio planteamiento del proceso de filtrado, sus efectos son repartidos entre la componente residual y la “inercial”.

De esta forma, con la modelización en espacio de los estados podemos desarrollar un nuevo método de control de la calidad en procesos multivariantes autocorrelacionados, basado en una metodología similar a la propuesta por Alwan y Roberts (1988) para el caso univariante, mediante la utilización de las innovaciones ( $g$ ) y de los estados ( $X_t$ ) resultantes de dicha modelización

### **g) Gráficos de control alternativos ante la existencia de autocorrelación muestral**

Dado el menor número de parámetros inmersos en la estimación de modelos en espacio de los estados, hemos utilizado estos modelos para filtrar la información y eliminar, en la medida de lo posible, la autocorrelación existente en las observaciones. Con la aplicación de estos modelos hemos conseguido la eliminación de la autocorrelación existente en las observaciones originales a través del uso en control de la calidad de las innovaciones procedentes del modelo y la reducción de la dimensión cuando manejamos gran cantidad de variables y el análisis del comportamiento general del proceso, mediante la utilización de los estados obtenidos con el modelo. Hay que tener en cuenta que la interpretabilidad y estabilidad de los resultados está inversamente relacionada con la

dimensionalidad del proceso, por lo que se hace necesario un esfuerzo adicional en la determinación del número de variables o en la reducción de éste mediante técnicas estadísticas, como los modelos en espacio de los estados.

Siguiendo el enfoque propuesto por Alwan y Roberts (1988) podemos establecer para controlar la calidad de la producción dos gráficos: un gráfico de control para las innovaciones, que nos permita detectar alteraciones en el proceso debidas a causas de variación especiales en el proceso; y un gráfico de control para los estados, que recoge el comportamiento general del proceso y nos permite detectar variaciones persistentes en el tiempo.

#### **h) Análisis de la calidad en un proceso de fabricación de cuchillos**

En la aplicación empírica desarrollada, y como resumen de lo expuesto en el capítulo 7, en el proceso de obtención de la información del proceso de fabricación de cuchillos jamoneros ha aparecido el problema de la presencia de autocorrelación. Si obviamos la presencia de esta autocorrelación podemos llegar a la conclusiones erróneas en el comportamiento del proceso.

Sin embargo, si tenemos en cuenta esta autocorrelación y la eliminamos para paliar el efecto negativo que puede producir la presencia de la misma, las conclusiones cambian por completo. Una vez filtrada la información, el proceso puede ser considerado bajo control y, por lo tanto, no existe ninguna causa de variación que deba ser investigada. Han sido analizadas las distintas alternativas que se pueden utilizar para filtrar la información con modelos de series temporales multivariantes llegando a la conclusión de que el mejor comportamiento aparece con el uso de un modelo en espacio de los estados. Con este modelo conseguimos no lanzar ninguna falsa alarma y además, mantenemos la óptica multivariante existente en los datos. Queda de manifiesto también el comportamiento errático de los modelos VAR cuando existe autocorrelación positiva dado que, el gráfico de control determinado usando los residuos de este modelo, marca dos situaciones fuera de control no detectadas por ningún otro gráfico.

## 8. 2. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURA

Lejos de suponer un estudio concluso, este trabajo es el inicio y germen de un campo de investigación con un amplio abanico de cuestiones teóricas y prácticas que deben ser analizadas. Sin ánimo de exhaustividad, se pueden resaltar las siguientes:

I. Aplicación del gráfico de control  $T_R^2$  cuando la información viene dada en forma de subgrupos racionales.

II. Obtención de un gráfico de control MCUSUM y MEWMA robustos siguiendo una metodología similar a la utilizada en el gráfico  $T_R^2$  consistente en la sustitución de los estimadores clásicos por estimadores robustos de la familia de las medias truncadas.

III. Determinación de la distribución del estadístico  $T^2$  vía simulación o utilizando otro método cuando utilizamos estimadores de posición y escala robustos.

IV. La relación entre los valores singulares y los coeficientes de correlación canónica de Akaike puede proporcionar una distribución probabilística que evite, al menos teóricamente, la necesidad de simulaciones o aproximaciones para la obtención de los límites de control.

V. Robustez de los algoritmos desarrollados frente a modificaciones distribucionales, haciendo especial hincapié en el comportamiento ante distribuciones de la familia exponencial.

VI. Desarrollos no paramétricos que presenten un buen comportamiento ante la presencia de autocorrelación. Este desarrollo nos va a permitir resolver a la vez

el problema existente con el incumplimiento de las dos suposiciones básicas en los gráficos de control clásicos.

VII. Análisis del comportamiento del recorrido medio de racha ante la presencia de distintos niveles de autocorrelación, de distinta intensidad y signo, en los gráficos de control propuestos.

VIII. Aplicación de la metodología propuesta en gráficos de control para la dispersión del proceso, proponiendo una alternativa a los gráficos de variabilidad existentes.

# **BIBLIOGRAFÍA**



## BIBLIOGRAFÍA

**ABRAHAM, B. (1998):** *Quality Improvement Through Statistical Methods*, Boston, Birkhäuser.

**ADAMS, B. M. y TSENG, I. (1998):** “Robustness of forecast-based monitoring schemes”, *Journal of Quality Technology* 30, pp: 328-339.

**ADICHIE, J. N. (1967):** “Estimates of regression coefficients based on rank tests”, *Annals of Mathematical Statistics* 38, pp: 894-904.

**AHN, S. K. y REINSEL, G. C. (1990):** “Estimation of partially nonstationary multivariate autoregressive models”, *Journal of the American Statistical Association* 85, pp: 849-856.

**AKAIKE, H. (1975):** “Markovian representation of stochastic processes by canonical variables”, *SIAM J. Control Optim.* 13, 162-173.

**AKAIKE, H. (1976):** “Canonical correlation analysis of time series and the use of an information criterion”. En *System Identification and Case Studies* (Eds. R. Mehra y D. Lainiotis). Academic Press, New York.



**ALFARO, J. L. (2002):** “Métodos multivariantes en control estadístico de la calidad”, *Documentos de trabajo de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de Albacete* (Doc: 2/2002/2).

[http://www.uclm.es/AB/fcee/D\\_trabajos/2-2002-2.pdf](http://www.uclm.es/AB/fcee/D_trabajos/2-2002-2.pdf)

**ALFARO, J. L., ALFARO, E., MONDÉJAR, J. y VARGAS, M. (2004):** “Control estadístico de la calidad: una breve reseña histórico”, *Documentos de trabajo de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de Albacete* (Doc: 2/2004/1). [http://www.uclm.es/AB/fcee/D\\_trabajos/2-2004-1.pdf](http://www.uclm.es/AB/fcee/D_trabajos/2-2004-1.pdf)

**ALFARO, J. L. y ORTEGA, J. F. (2003):** “Una alternativa robusta al gráfico de control  $T^2$  de Hotelling mediante truncamientos”, *Documentos de trabajo de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de Albacete* (Doc: 2/2003/3). [http://www.uclm.es/AB/fcee/D\\_trabajos/2-2003-3.pdf](http://www.uclm.es/AB/fcee/D_trabajos/2-2003-3.pdf)

**ALLOWAY, J. A. y RAGHAVACHARI, M. (1991):** “Control charts based on the Hodges-Lehmann estimator”, *Journal of Quality Technology* 23, pp: 336-347.

**ALT, F. B. (1985):** “Multivariate quality control”. En JOHNSON, N. L. & KOTZ, S. : *Encyclopedia of Statistical Sciences* 6, John Wiley & Sons.

**ALWAN, L. C. (2000):** *Statistical Process Analysis*, Mc Graw-Hill.

**ALWAN, L. C. y ROBERTS, H. V. (1988):** “Time-Series Modeling for Statistical Process Control”, *Journal of Business & Economic Statistics* 6, pp: 87-95.

**ALWAN, L. C. y ROBERTS, H. V. (1995):** “The problem of misplaced control limits”, *Journal of the Royal Statistical Society* 44, Series C, pp: 269-306.

**AMOR, R. , MARTÍNEZ, A. M. y OLMO, M. J. (2005):** *Control estadístico de la calidad. Una introducción*. Grupo Editorial Universitario.

**AOKI, M. (1983):** *Notes on economic time series analysis: system theoretic approach*, Springer-Verlag.

**AOKI, M. (1987):** *State space modeling of time series*, Springer-Verlag.

**AOKI, M. y HAVENNER, A. M. (1991):** “State Space modeling of multiple time series”, *Econometrics Reviews* 10, pp: 1-99.

**APARISI, F. y GARCÍA DÍAZ, J. C. (2001):** “Aumento de la potencia del gráfico de control multivariante  $T^2$  de Hotelling utilizando señales adicionales de falta de control”, *Estadística Española* 148, pp: 171-188.

**APARISI, F. (1996):** “Hotelling’s  $T^2$  control chart with adaptive sample sizes”, *International Journal of Production Research* 34, pp: 2853-2862.

**APLEY, D. W. y TSUNG, F. (2002):** “The autoregressive T-squared chart for monitoring univariate autocorrelated processes”, *Journal of Quality Technology* 34, pp: 80-96.

**ARGULLÓ, J. (1996):** “Exact iterative computation of the multivariate minimum volume ellipsoid estimator with a branch and bound algorithm”. En HEIDELBERG, A. P. : *Proceeding in Computational Statistic*, Physical-Verlag, pp:175-180.

**BAGSHAW, M. y JOHNSON, R. A. (1975):** “The effect of serial correlation on the performance of CUSUM tests II”, *Technometrics* 17, pp: 73-80.

**BAI, D. S. y CHOI, I. S. (1995):** “ $\bar{X}$  and R control charts for skewed populations”, *Journal of Quality Technology* 27, pp: 120-131.

**BALAKRISHNAN, N. y KOCHERLAKOTA, S. (1986):** “Effect of non-normality on  $\bar{x}$  charts: single assignable cause model”, *Sankhya B* 48, pp: 439-444.

**BALLABRIGA, F. C., ÁLVAREZ, L. J. y JAREÑO, J. (2000):** “A BVAR macroeconometric model for the spanish economy: methodology and results”, *Banco de España-Servicio de Estudios*, Estudios Económicos 64.

**BARNARD, G. A. (1959):** “Control charts and stochastic processes”, *Journal of the Royal Statistical Society* 21, Serie B, pp: 239-271.

**BARTLETT, M. S. (1939):** “A note on tests of significance in multivariate analysis”, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 35, pp: 180-185.

**BAUER, D. (1998):** *Some asymptotic theory for the estimation of linear systems using maximum likelihood methods or subspace algorithms*, Thesis proposal, Technischen Universität Wien.

<http://www.eos.tuwien.ac.at/Oeko/Teaching/Theses/dissbauer.pdf>

**BAUER, D. (2005):** “Comparing the CCA subspace method to pseudo maximum likelihood methods in the case of no exogenous input”, *Journal of Time Series Analysis* 26, pp: 631-648.

**BAUER, D. y WAGNER, M. (2002):** “Estimating cointegrated systems using subspace algorithms”, *Journal of Econometrics* 111, pp: 47-84.

**BAUER, D. y WAGNER, M. (2003):** “A canonical form for unit root processes in the state space framework”, *Diskussionsschriften* 03-12. Universität Bern. <http://www.vwi.unibe.ch/publikationen/download/dp0312.pdf>

**BENEKE, M., LEEMIS, L. M., SCHLEGEL, R. E. y FOOTE, B. L. (1988):** “Spectral analysis in quality control: a control chart based on the periodogram”, *Technometrics* 30, pp: 63-70.

**BERTHOUEX, P. M., HUNTER, W. G. y PALLESEN, L. (1978):** “Monitoring sewage treatment plants: Some quality control aspects”, *Journal of Quality Technology* 10, pp: 139-149.

**BISSEL, A. F. (1969):** “Cusum techniques for quality control”, *Applied Statistics* 18, pp: 1-30.

**BORROR, C. M., MONTGOMERY, D. C. y RUNGER, G. C. (1999):** “Robustness of the EWMA control chart to non-normality”, *Journal of Quality Technology* 31, pp: 309-316.

**BOX, G. E. P., JENKINS, G. M. y MACGREGOR, J. F. (1974):** “Some recent advances in forecasting and control. Part. II”, *Journal of the Royal Statistical Society* 23, Serie C, pp: 158-179.

**BOX, G. E. P. y JENKINS, G. M. (1963):** “Further contributions to adaptive quality control: simultaneous estimation of dynamics; non-zero costs”, *Bulletin International Statistical Institute*, pp: 943-973.

**BOX, G. E. P. y JENKINS, G. M. (1976):** *Time series analysis, forecasting and control*, Holden Day, San Francisco.

**BROCKWELL, P. J. y DAVIS, R. A. (1991):** *Time Series: Theory and Methods*. Springer Verlag, 2ª Edición.

**BROOK, D. y EVANS, D. A. (1972):** “An approach to the probability distribution of CUSUM run length”, *Biometrika* 59, pp: 539-549.

**BURR, I. J. (1967):** “The Effect of Nonnormality on Constants for  $\bar{x}$  and R Charts” , *Industrial Quality Progress* 23, pp: 563-569.

**BURROWS, P. M. (1962):** “ $\bar{X}$  control schemes for a production variable with skewed distribution”, *The Statistician* 12, pp: 296-312.

**CANOVA, F. (1999):** “Vector autoregressive models: specification, estimation, inference and forecasting”. En PESARAN, M. H. & WICKENS, M. R.: *Handbook of applied econometrics I: Macroeconomics*, pp:73-138.

**CAPILLA, C. y ROMERO, R. (1993):** “Señales de falta de control en gráficos  $\bar{X}$ ”, *Estadística Española* 134, pp: 665-685.

**CARMO, V. D., DIAS, L. F. y MENDOÇA, A. (2001):** “Comparative study of the performance of the CUSUM and EWMA control charts”, *The 29<sup>th</sup> International Conference on Computers and Industrial Engineering (ICC&IE)*, Montreal.

**CAROT ALONSO, V. (2001):** *Control Estadístico de Calidad*. Alfaomega Grupo Editor.

**CASALS, S., SOTOCA, S. y JEREZ, M (1999):** “A fast and stable method to compute the likelihood of time invariant state-space models”, *Economics Letters* 65, pp: 329-337.

**CASALS, S., SOTOCA, S. y JEREZ, M (2000):** “Exact Smoothing for stationary and nonstationary time series”, *International Journal of Forecasting* 16, pp: 59-69.

**CASALS, S. y SOTOCA, S. (2001):** “The exact likelihood for a state space model with stochastic inputs”, *Computers and Mathematics with Applications* 42, pp: 199-209.

**CASTAGLIOLA, P. (2000):** “ $\bar{X}$  control chart for skewed populations using a scaled weighted variance method”, *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering* 7, pp: 237-252.

**CASTAGLIOLA, P. (2001):** “Control charts for data having a symmetrical distribution with a positive kurtosis”, *Recent Advances in Reliability and Quality Engineering*, Pham H (ed.). World Scientific: Singapore 7, pp: 1-16.

**CASTAGLIOLA, P y TSUNG, F. (2005):** “Autocorrelated SPC for non-normal situations”, *Quality and reliability engineering international* 21, pp: 131-161.

**CAULCUTT, R. (1995):** “The rights and wrongs of control charts”, *Journal of the Royal Statistical Society* 44, Series C, pp: 279-288.

**CHAMP, C. W. y CHOU, S. (2003):** “Comparison of Standard and individual limits phase I Shewhart  $\bar{x}$ , R and S charts”, *Quality and reliability engineering international* 19, pp: 161-170.

**CHAMP, C. W. y WOODALL, W. H. (1987):** “Exact results of Shewhart control charts with supplementary run rules”, *Technometrics* 29, pp: 393-399.

**CHAN, L. K. , K. P. HAPUARACHCHI y B. D. MACPHERSON (1988):** “Robustness of x and R Charts” , *IEEE Transaction on Reliability* 37, pp: 117-123.

**CHOI, B. (1992):** *ARMA model identification*, Springer-Verlag.

**CHOOBINEH, F. y BALLARD, J. L. (1987):** “Control-limits of QC charts for skewed distributions using weighted-variance”, *IEEE Transactions on Reliability* 36, pp: 473-477.

**CHOOBINEH, F. y BRANTING, D. A. (1986):** “A single approximation for semivariance”, *European Journal of Operational Research* 27, pp: 364-370.

**COOK, R. D., HAWKINS, D. M. y WEISBERG, S. (1992):** “Exact iterative computation of the robust multivariate minimum volume ellipsoid estimator”, *Statistics and Probability Letters* 16, pp: 213-218.

**COWDEN, D. J. (1957):** *Statistical methods in quality control*, Prentice-Hall.

**CROISER, R. B. (1988):** “Multivariate Generalizations of Cumulative Sum Quality-Control Schemes”, *Technometrics* 30, pp: 291-303.

**CROSBY, P. B. (1979) :** *Quality is free: the art of making quality certain*, McGraw-Hill..

**CROWDER, S. V. (1987):** “A simple method for studying run-length distributions of exponentially weighted moving average charts”, *Technometrics* 29, pp: 401-407.

**CROWDER, S. V. (1989):** “Design of exponentially weight moving average schemes”, *Journal of Quality Technology* 21, pp: 155-168.

**CROWDER, S. V. y HAMILTON, M. (1992):** “An EWMA for monitoring a process standard deviation”, *Journal of Quality Technology* 24, pp: 12-21.

**DEL CASTILLO, E. (2002) :** *Statistical Process Adjustment for Quality Control*, John Wiley & Sons.

**DEMING, W. E. (1986) :** *Out of the crisis*, Cambridge University Press, Cambridge.

**DESAI, U. B. y PAL, D. (1982):** “A realization approach to stochastic model reduction and balanced stochastic realization”, *Preprint IEEE Conference on Decision and Control*, pp: 1105- 1112.

**DOAN, Th., LITTERMAN, R. B. y SIMS, Ch. A. (1984) :** “Forecasting and conditional projection using realistic prior distributions”, *Econometric Review* 3, pp: 1-144.

**DODGE, Y. y JURECKOVÁ, J. (2000):** *Adaptative Regression*, Springer-Verlag..

**DONOHU, D. L. (1982):** “Breakdown properties of multivariate location estimators”, *Qualifying Paper Harvard University*, Boston.

**DORFMAN, J. H. y HAVENNER, A. M. (1992):** “A bayesian approach to state space multivariate time series modeling”, *Journal of Econometrics* 52, pp: 315-346.

**DOU, Y. y PING, S. (2002):** “One-sided control charts for the mean of positively skewed distributions”, *Total Quality Management* 13, pp: 1021-1033.

**DURBIN, J. y KOOPMAN, S. J. (2001):** *Time series Analysis by state space methods*, Oxford University Press.

**ERMER, D. S., CHOW, M. C. y WU, S. M. (1979):** “A time series control chart for a nuclear reactor”, *Annual Reliability and Maintainability Sympos, Institute of Electrical and Electronic Engineers*, pp: 92-98.



**ESPASA, A. y CANELO, J.R. (1993):** *Métodos cuantitativos para el análisis de la coyuntura económica*. Alianza Editorial, Madrid.

**FAHRMEIR, L. y TUTZ, G. (1991):** *Multivariate statistical modelling based on generalized linear models*, Springer-Verlag.

**FARNUM, N. R. (1994):** *Modern statistical quality control and improvement*. California, Duxbury Press.

**FARNUM, N. R. (1997):** “Using Johnson curves to describe non-normal process data”, *Quality Engineering* 9, pp: 329-336.

**FERREL, E. B. (1958):** “Control charts for log-normal universe”, *Industrial Quality Control* 15, pp: 4-6

**FUCHS, C. y KENETT, R. S. (1998):** *Multivariate Quality Control*, Marcel Dekker, New York.

**GAN, F. F. (1991):** “An optimal design of CUSUM quality Control Charts”, *Journal of Quality Technology* 23, pp: 279-286.

**GEL'FAND, I. M. y YAGLOM, A. M. (1959):** *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press, Baltimore.

**GILBERT, K. C., KIRBY, K. y HILD, C. R. (1997):** “Charting autocorrelated data: Guidelines for practitioners”, *Quality Engineering* 9, pp: 367-382.

**GLYNN, W. J. y MUIRHEAD, R. J. (1978):** “Inference in canonical correlation analysis”, *Journal of Multivariate Analysis* 8, pp: 468-478.

**GOEL, A. L. y WU, S. M. (1971):** “Determination of ARL and a contour nomogram for CUSUM charts to control normal mean”, *Technometrics* 13, pp: 221-230.

**GOLDSMITH, P. L. y WHITFIELD, H. (1961):** “Average run length in cumulative chart quality control schemes”, *Technometrics* 3, pp: 11-20.

**GRANT, E. L. y LEAVENWORTH, R. S.(1981):** *Control Estadístico de Calidad*. Mexico, Compañía Editorial Continental.

**HAMILTON, J. D. (1994a):** “State-space models”, *Handbook of Econometrics* 4, pp:3039-3080.

**HAMILTON, J. D. (1994b):** *Time series Analysis*, Princeton University Press.

**HAMPEL, F. R. (1974):** “The influence curve and its role in robust estimation”, *Journal of the American Statistical Association* 69, pp: 383-393.

**HAMPEL, F. R., RONCHETTI, E. M., ROUSSEEUW, P. J. y STAHEL, W. A. (1986):** *Robust statistics: the approach based on influence functions*, John Wiley & Sons.

**HANSEN, B.L. y GHARE, P.M. (1990):** *Control de Calidad. Teoría y Aplicaciones*. Díaz de Santos.

**HAPUARACHCHI, K. P., CHAN, L. K. y MACPHERSON, B. D. (1988):** “Robustness of  $\bar{x}$  and R chart”, *IEEE Transactions on Reliability* 37, pp: 117-123.

**HARDIN, J. y ROCKE, D.M. (1999):** “The distribution of robust distances”, *University of California* (preprints).

**HARVEY, A. C. (1981):** *The econometric analysis of time series*, Oxford.

**HARVEY, A. C. (1993):** *Time series models* (2th ed), Harvester Wheatsheaf, New York.

**HARRIS, T. J. y ROSS, W. H. (1991):** “Statistical Process Control Procedures for Correlated Observations”, *The Canadian Journal of Chemical Engineering* 69, pp: 48-57.

**HAWKINS, D. M. (1981):** “A CUSUM for a Scale Parameter”, *Journal of Quality Technology* 13, pp:228-235.

**HAWKINS, D. M. (1993):** “Cumulative sum control charting: An underutilized SPC tool”, *Quality Engineering* 5, pp: 463-477.

**HAWKINS, D. M. (1994):** “The feasible solution algorithm for the minimum covariance determinant DM estimator in multivariate data”, *Computational Statistics and Data Analysis* 17, pp: 197-210.

**HAWKINS, D. M. y OLIVE, D. J. (1999):** “Improved feasible solution algorithms for high breakdown estimation”, *Computational Statistics and Data Analysis* 30, pp: 1-11.

**HAYTER, A. J. y TSUI, K. L. (1994):** “Identification and quantification in multivariate quality control problems”, *Journal of Quality Technology* 26, pp: 197-208.

**HEALY, J. D. (1993):** “A note on multivariate CUSUM procedures”, *Technometrics* 29, pp: 409-412.

**HOAGLIN, D. C., MOSTELLER, F. y TUKEY, J. W. (2000):** *Understanding robust and exploratory data analysis*, John Wiley and Sons.

**HOERL, A. E. y KENNARD, R. W. (1970):** “Ridge regression: biased estimation for non-orthogonal problems”, *Technometrics* 42, pp: 80-87.

**HU, S. J. y ROAN, C. (1996):** “Change patterns of time series-based control charts”, *Journal of Quality Technology* 28, pp: 302-312.

**HUBER, P. J. (1964):** “Robust estimation of location parameter”, *Annals of Mathematical Statistics* 35, pp: 73-101.

**HUNTER, J. S. (1986):** “The exponentially weighted moving average”, *Journal of Quality Technology* 18, pp: 203-210.

**HUNTER, J. S. (1989):** “A one-point plot equivalent to Shewhart chart with Western Electric rules”, *Quality Engineering* 2, pp: 13-19.

**ISHIKAWA, K. (1994):** *Introducción al Control de Calidad*. Díaz de Santos.

**JACKSON, J. E. (1980):** “Principal components and factor analysis: Part I - Principal Components”, *Journal of Quality Technology* 12, pp: 201-213.

**JACKSON, J. E. (1985):** “Multivariate quality control”, *Communications in statistics: Theory and Methods* 14, pp: 2657-2688.

**JIANG, W. (2004):** “Multivariate control charts for monitoring autocorrelated processes”, *Journal of Quality Technology* 36, pp: 367-379.

**JIANG, W. , TSUI, K. y WOODALL, W. H. (2000):** “A new SPC monitoring method: The ARMA chart”, *Technometrics* 42, pp: 399-410.

**JOHNSON, N. L. (1961):** “A simple theoretical approach to cumulative sum control charts”, *Journal of the American Statistical Association* 56, pp: 835-840.

**JOHNSON, R. A. y BAGSHAW, M. (1974):** “The effect of serial correlation on the performance of CUSUM tests”, *Technometrics* 16, pp: 103-112.

**JOHNSON, R. A. y BAGSHAW, M. (1975):** “The effect of serial correlation on the performance of CUSUM tests II”, *Technometrics* 17, pp: 73-80.

**JOHNSON, R. A. y WICHERN, D. W. (1998):** *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Prentice Hall.

**JONES, L. A. y WOODALL, W. H. (1998):** “The performance of bootstrap control charts”, *Journal of Quality Technology* 30, pp: 362-375.

**KALGONDA, A. A. y KULKARNI, S. R. (2004):** “Multivariate quality control chart for autocorrelated processes”, *Journal of Applied Statistics* 31, pp: 317-327.

**KITAGAWA, G. y GERSCH, W. (1984):** “A smoothness priors-state space modeling of time series with trend and seasonality”, *Journal of the American Statistical Association* 79, pp: 378-389.

**KOHN, R. y ANSLEY, C. F. (1989):** “Filtering and smoothing algorithms for state space models”, *Computer Mathematical Applications* 18, pp: 515-528.

**KRAMER, H. G. y SCHMID, W. (1997):** “EWMA charts for multivariate time series”, *Sequential Analysis* 16, pp: 131-154.

**LANGENBERG, P. y IGLEWICZ, B. (1983):** “Trimmed mean X and R charts”, *Journal of Quality Technology* 18, pp: 152-161.

**LARIMORE, W. E. (1983):** “System identification, reduced order filters and modelling via canonical variate analysis”, *American Control Conference*, 2, pp: 445-451.

**LAURO, C., ANTOCH, J., ESPOSITO, V. y SAPORTA, G. (2002):** *Multivariate Total Quality Control*, Physica-Verlag.

**LAWLEY, D. N. (1959):** “Test of significance in canonical analysis”, *Biometrika* 41, pp: 59-66.

**LENZ, H. J. y WILRICH, P. T. (1997):** *Frontiers in Statistical Quality Control* 5, Physical-Verlag.

**LENZ, H. J. y WILRICH, P. T. (2001):** *Frontiers in Statistical Quality Control* 6, Physical-Verlag.

**LENZ, H. J. y WILRICH, P. T. (2004):** *Frontiers in Statistical Quality Control* 7, Physical-Verlag.

**LINDERMAN, K. y LOVE, T. E. (2000):** “Economic and Economic Statistical Designs for MEWMA Control Charts”, *Journal of Quality Technology* 32, pp: 410-417.

**LITTERMAN, R. B. (1984a) :** “Specifying vector autoregressions for macroeconomic forecasting”, *Federal Reserve Bank of Minneapolis*, Staff Report n°. 92.

**LITTERMAN, R. B. (1984b) :** “Forecasting and policy analysis with bayesian vector autoregression models”, *Federal Reserve Bank of Minneapolis*, Quarterly Review 8, pp: 30-41.

**LITTERMAN, R. B. (1986) :** “Forecasting with bayesian vector autoregression - five years of experience”, *Journal of Business and Economic Statistics* 4, pp: 25-38.

**LIU, R. Y. (1990):** “On a notion of data depth based on random simplices”. *The Annals of Statistics* 18, pp : 405 - 414.

**LIU, R. Y. y SINGH, K. (1993):** “A quality index based on data depth and multivariate rank test”, *Journal of American Statistical Association* 88, pp : 252 - 260.

**LIU, R. Y. (1995):** “Control Charts for Multivariate Processes”, *Journal of American Statistical Association* 90, pp : 1380 - 1387.

**LIU, R. Y. y TANG, J. (1997):** “Control charts for dependent and multivariate measurements”. En LENZ, H. J. & WILRICH, P. T. : *Frontiers in Statistical Quality Control* 5, Physical-Verlag, pp:102-114.

**LONGNECKER, M. T. y RYAN, T. P. (1992):** “Charting correlated process data”, *Technical Report* 166, *Texas A&M University*, Department of Statistics.

**LOWRY, C. A. , WOODAL, W. H. y MONTGOMERY, D. C. (1995):** “A review of multivariate control charts”, *IIE Transactions* 27, pp: 800-810.

**LOWRY, C. A. , WOODALL, W. H. , CHAMP, C. W. y RIGDON, S. E (1992):** “A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart”, *Technometrics* 34, pp: 46-53.

**LUCAS, J. M. (1973):** “A modified V mask control scheme”, *Technometrics* 15, pp: 833-847.

**LUCAS, J. M. (1976):** “The design and use of cumulative sum quality control schemes”, *Journal of Quality Control* 8, pp: 1-12.

**LUCAS, J. M. y CROSIER, R. B. (1982):** “Fast initial response for CUSUM quality-control schemes: properties and enhancements”, *Technometrics* 24, pp: 199-205.

**LUCAS, J. M. y SACCUCI, M. S. (1990):** “Exponentially weighted moving average control schemes: properties and enhancements”, *Technometrics* 32, pp: 1-12.

**LUCENO, A. y COFIÑO, A. S. (2005):** “The random intrinsic fast initial response of two-sided cusum charts”, *Test (En prensa)*.

[http://www.seio.es/test/Archivos/issues/Test\\_luceno.pdf](http://www.seio.es/test/Archivos/issues/Test_luceno.pdf)

**LÜTKEPOHL, H. (1993):** *Introduction to multiple time series analysis*. Springer Verlag, Berlín.

**MACGREGOR, J. E. y HARRIS, T. J. (1993):** “The exponentially weighted moving variance”, *Journal of quality technology* 25, pp: 106-118.

**MARTÍN PLIEGO, F. J. y RUIZ-MAYA PÉREZ, L. (1998):** *Fundamentos de Probabilidad*, Thomson.

**MASON, R. L. , CHOU, Y. y YOUNG, J.C. (2001):** “Applying Hotelling`s  $T^2$  Statistic to Batch Processes” , *Journal of Quality Technology* 33, pp: 466 -479.

**MASON, R. L. , TRACY, N. D. y YOUNG, J.C. (1995):** “Decomposition of  $T^2$  for multivariate control chart interpretation” , *Journal of Quality Technology* 27, pp: 109-119.



**MASON, R. L. y YOUNG, J. C. (1997):** “A control procedure for autocorrelated multivariate processes” , *American Statistical Association Annual Meeting*, California.

**MASON, R. L. y YOUNG, J. C. (1999):** “Improving the Sensitivity of the  $T^2$  statisitc in multivariate process control”, *Journal of Quality Technology* 31, pp: 155-165.

**MASON, R. L. y YOUNG, J. C. (2000):** “Interpretive features of a  $T^2$  chart in multivariate SPC” , *Quality Progress*, April 2000, pp: 84-89.

**MASON, R. L. y YOUNG, J. C. (2002):** *Multivariate statistical process control with industrial applications* , ASA-SIAM series on statistics and applied probability.

**MITRA, A. (1998):** *Fundamentals of Quality Control and Improvement* . Prentice Hall.

**MITTNIK, S. (1989) :** *System-Theoretic Methods in economic modelling*, Pergamon Press, Oxford.

**MOLNAU, W. E. , MONTGOMERY, D. C. y RUNGER, G. C. (2001):** “A program for ARL calculation for multivariate EWMA control charts”, *Journal of Quality Technology* 33, pp: 515-521.

**MONTGOMERY, D.C. (1991):** *Control Estadístico de la Calidad*. Grupo Editorial Iberoamérica.

**MONTGOMERY, D.C. (2004):** *Introduction to Statistical Quality Control* (5th ed.). John Wiley & Sons.

**MONTGOMERY, D. C. y MASTRANGELO, C. M. (1991):** “Some Statistical Process Control Methods for Autocorrelated Data”, *Journal of Quality Technology* 23, pp: 179-193.

**MORARI, M. y ZAFIRIOU, E. (1989) :** *Robust Process Control*. London, Prentice-Hall International.

**MORTON, K. (2000):** “Two Alternatives to the Shewhart  $\bar{X}$  Control Charts”. *Journal of Quality Technology* 32, pp: 427 -431.

**MOSKOWITZ, H. , WARDELL, D. G. y PLANTE, R. D. (1994):** “Run-length distributions of special-cause control charts for correlated processes”. *Technometrics* 36, pp: 3-27.

**MURPHY, B. J. (1987):** “Screening out of control variables with T<sup>2</sup> multivariate quality control procedures”, *Journal of the Royal Statistical Society* 36, Serie D (The Statistician), pp: 571-583.

**NEAVE, H. R. y WHEELER, D. J. (1996):** “Shewhart’s charts and the probability approach”, Ninth Annual Conference of the British Deming Association.

**NELSON, P. R. (1979):** “Control charts for Weibull processes with standards given”, *IEE Transactions on Reliability* 28, pp: 283-288

**NIANG, N. (2002):** “Multidimensional methods for statistical process control: some contributions of robust statistics”. En LAURO, C., ANTOCH, J., ESPOSITO, V. & SAPORTA, G.: *Multivariate Total Quality Control*, Physica-Verlag.

**ORTEGA, J. F. (2000):** “Nuevas familias de estimadores robustos y detección de observaciones atípicas en modelos lineales”. Tesis doctoral, Universidad de Castilla-La Mancha.

**ORTEGA, J. F. (2001):** “Notas sobre estadística robusta”, *Documentos de trabajo de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de Albacete* (Doc: 2/2001/2). [http://www.uclm.es/AB/fcee/D\\_trabajos/2-2001-1.PDF](http://www.uclm.es/AB/fcee/D_trabajos/2-2001-1.PDF)

**ORTEGA, J. F. (2002):** “Elección de un nivel de truncamiento óptimo para la familia de Medias Truncadas”, *Documentos de trabajo de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de Albacete* (Doc: 2/2002/4). [http://www.uclm.es/AB/fcee/D\\_trabajos/2-2002-4.pdf](http://www.uclm.es/AB/fcee/D_trabajos/2-2002-4.pdf)

**ORTEGA, J. F. (2003):** “Una familia de estimadores de escala mediante truncamientos”, *Documentos de trabajo de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de Albacete* (Doc: 2/2003/2). [http://www.uclm.es/AB/fcee/D\\_trabajos/2-2003-2.pdf](http://www.uclm.es/AB/fcee/D_trabajos/2-2003-2.pdf)

**ÖSTERMARK, R. (1997):** “Modeling cointegrated processes by a vector-valued state space algorithm. Evidence on the impact of Japanese stock prices on the finnish derivatives market”. En AOKI, M. & HAVENNER, A. M.: *Applications of Computer Aided Timer Series Modeling*. Lecture Notes in Statistics 119, Springer-Verlag.

**ÖSTERMARK, R. y AOKI, M. (1992):** “Time series evidence of impacts of the US economy on the Scandinavian economy”, *IFAC Workshop on Economic Timer Series Analysis and System Identification*, Vienna.

**OTTER, P. W. y VAN DAL, R. (1989):** “State-space approximation of multi-input multi-output systems with stochastic exogenous inputs”, *Computer Mathematic Applications* 18, pp: 529-538.

**PAGE, E. S. (1954):** “Continuous Inspection Schemes”, *Biometrics* 41, pp: 100-115.

**PAGE, E. S. (1961):** “Cumulative sum control charts”, *Technometrics* 3, pp: 1-9.

**PAN, X. (2002):** “Var chart: a quality control chart monitoring multivariate autocorrelated processes”, *Decision Sciences Institute 2002 Annual Meeting Proceedings*, pp: 2377-2382.

**PARK, J. Y. y PHILLIPS, P. C. B. (1989):** “Statistical inference in regressions with integrated processes”, *Econometric Theory*, pp: 95-131.

**PEÑA, D. (1987):** *Estadística. Modelos y métodos. Vol 2: Modelos lineales y series temporales*. Alianza Editorial, Madrid.

**PERNEBO, L. y SILVERMAN, L. M. (1982):** “Model reduction via balanced state space representations”, *IEEE Automatic Control* 27, pp: 382-387.

**PIGNATIELLO, J.J. y RUNGER, G.C. (1990):** “Comparisons of multivariate CUSUM charts”, *Journal of Quality Technology* 22, pp: 173-186.

**PLANTE, R., SEPPALA, T., MOSKOWITZ, H. y TANG, J. (1995):** “Statistical process control via the subgroup bootstrap”, *Journal of Quality Technology* 27, pp: 139-153.

**POLA MASEDA, A.:** *Aplicación de la Estadística al Control de Calidad*. Marcombo, Boixareu Editores.

**PAPPANASTOS, E. A. y ADAMS, B. M. (1996):** “Alternative designs of the Hodges-Lehmann control chart”, *Journal of Quality Technology* 28, pp: 213-223.

**PRABHU, S. S. y RUNGER, G.C. (1997):** “Designing a multivariate EWMA control chart”, *Journal of Quality Technology* 29, pp: 8-15.

**PYZDEK, T. (1992):** “Process capability analysis using personal computers”, *Quality Engineering* 4, pp: 419-440.

**QUILIS, E. M. (2002):** “Modelos BVAR: especificación, estimación e inferencia”, Papeles de Trabajo, *Instituto de Estudios Fiscales*.

**REYNOLDS, M. R. (1975):** “Approximations to the average run length in cumulative sum control charts”, *Technometrics* 17, pp: 65-71.

**ROBERTS, S. W. (1959):** “Control chart test based on geometric moving averages”, *Technometrics* 1, pp: 239-250.

**ROBERTSON, J. C. y TALLMAN, E.W. (1999):** “Vector autoregressions: forecasting and reality”, *Federal Reserve Bank of Atlanta, Economic Review*, first quarter, pp: 4-18.

**ROBINSON, P. B. y HO, T.Y. (1978):** “Average run lengths of geometric moving averages”, *Technometrics* 1, pp: 239-250.

**ROCKE, D. M. (1989):** “Robust Control Charts”, *Technometrics* 31, pp: 173-184.

**ROCKE, D. M. y WOODRUFF, D. L. (1996):** “Identification of outliers in multivariate data”, *Journal of the American Statistical Association* 91, pp: 1047-1061.

**ROUSSEEUW, P. J. (1984):** “Least median of squares regression”, *Journal of the American Statistical Association* 79, pp: 871-880.

**ROUSSEEUW, P. J. (1985):** “Multivariate estimation with high breakdown point”, *Mathematical Statistics and Applications B*, pp: 283-297.

**ROUSSEEUW, P. J. y LEROY, A. M. (1987):** *Robust regression and outlier detection*, John Wiley & Sons.

**ROUSSEEUW, P. J. y VAN ZOMEREN, B. C. (1990):** “Unmasking multivariate outliers and leverage points(with discussion)”, *Journal of the American Statistical Association* 85, pp: 633-651.

**ROUSSEEUW, P. J. y VAN DRIESSEN, K. (1999):** “A fast algorithm for the minimum covariance determinant estimator”, *Technometrics* 41, pp: 212-223.

**ROYSTON, J. P. (1982):** “An extension of Shapiro and Wilk’s W test for normality to large samples”, *Applied Statistics* 31, pp: 115-124.

**RUIZ-MAYA PÉREZ, L. y MARTÍN PLIEGO, F. J. (1999):** *Fundamentos de Inferencia Estadística*, Thomson.

**RUNGER, G. C. (1996):** “Multivariate statistical process control for autocorrelated processes”, *International Journal of Production Research* 34, pp: 1715-1724.

**RUNGER, G. C., KEATS, J. B., MONTGOMERY, D. C. y SCRANTON, R. DL (1999):** “Improving the performance of the multivariate exponentially weighted moving average control chart”, *Quality and reliability engineering international* 15, pp: 161-166.

**RUNGER, G. C. y MONTGOMERY, D. C. (1997):** “Multivariate and univariate process control: geometry and shift directions”, *Quality and reliability engineering international* 13, pp: 153-158.

**RUNGER, G. C. y PRABHU, S. S. (1996):** “A Markov Chain Model for the Multivariate Exponentially Weighted Moving Averages Control Chart”, *Journal of American Statistical Association* 91, pp : 1701 - 1706.

**RUNGER, G. C. y TESTIK, M. C. (2004):** “Multivariate extensions to cumulative sum control charts”, *Quality and reliability engineering international* 20, pp: 587-606.

**RUNKLE, D. E. (1987):** “Vector autoregressions and reality ”, *Journal of Business y Economic Statistic* 5, pp:128-133.

**RYAN, T. P. (1991):** “Discussion of: Some statistical process control methods for autocorrelated data”, *Journal of Quality Technology* 23, pp:200-202.

**RYAN, T. P. (1997):** “Efficient estimation of control chart parameters”. En LENZ, H. J. y WILRICH, P. T. : *Frontiers in Statistical Quality Control* 5, Physical-Verlag, pp:90-101.

**RYAN, T.P. (2000):** *Statistical Methods for Quality Improvement*. Jonh Wiley & Sons.

**SCHILLING, E. G. y NELSON, P. R. (1976):** “The Effect of Nonnormality on the Control Limits of  $\bar{x}$  Charts”, *Journal of Quality Technology* 8, pp: 183-188.

**SCHMID, W. (1995):** “On the run length of a Shewhart chart for correlated data”, *Statistical Papers* 36, pp: 111-130.

**SCHMID, W. (1997a):** “CUSUM control schemes for gaussian processes”, *Statistical Papers* 38, pp: 191-217.

**SCHMID, W. (1997b):** “On EWMA charts for time series”. En LENZ, H. J. & WILRICH, P. T. : *Frontiers in Statistical Quality Control 5*, Physical-Verlag, pp:114-137.

**SCHMID, W. y SCHÖNE, A. (1997):** “Some properties of the EWMA control chart in the presence of autocorrelation”, *The Annals of Statistics* 25, pp:1277-1283.

**SEBER, G. A. F. (1984) :** *Multivariate observations*. John Wiley & Johns.

**SHAPIRO, S. S. y WILK, M. B. (1965):** “An analysis of variance test for normality”, *Biometrika* 52, pp: 591-611.

**SHEWHART, W. A. (1931) :** *Economic control of quality of manufactured product*. Princeton: Van Nostrand Reinhold.

**SHEWHART, W. A. (1986) :** *Statistical Method: from de viewpoint of quality control*. New York, Dover.

**SIEGMUND, D. (1985) :** *Sequential Analysis: Tests and Confidence Intervals*, Springer-Verlag, New York.

**SIMS, Ch. A. (1980) :** “Macroeconomics and reality”, *Econometrica* 48, pp: 1-48.

**STOUMBOS, Z. G. y SULLIVAN, J. H. (2002):** “Robustness to non-normality of the multivariate EWMA control chart”, *Journal of Quality Technology* 34, pp: 260-276

**SULLIVAN, L. P. (1984):** “Reducing variability: A new approach to quality”, *Quality Progress* 17, pp: 15-21.



**SULLIVAN, J. H. y WOODALL, W. H. (1996):** “A comparison of multivariate control charts for individual observations”, *Journal of Quality Technology* 28, pp: 398-408.

**SUPERVILLE, C. R. y ADAMS, B. M. (1995):** “The performance of tracking signals and control charts in process monitoring”, *International Journal of Operations and Quantitative Management* 1, pp: 131-143.

**TATUM, L. G. (1997):** “Robust Estimation of the Process Standard Deviation for Control Charts”, *Technometrics* 3, pp: 127-141.

**TESTIK, M. C. (2004):** “Design strategies for the multivariate exponentially weighted moving average control chart”, *Quality and reliability engineering international* 20, pp: 571-577.

**TESTIK, M. C. (2005):** “Model inadequacy and residuals control charts for autocorrelated processes”, *Quality and reliability engineering international* 21, pp: 115-130.

**TESTIK, M. C. y BORROR, C. M. (2004):** “Design Strategies for the multivariate EWMA control chart”, *Quality and reliability engineering international* 19, pp: 31-38.

**TESTIK, M. C. , RUNGER, G. C. y BORROR, C. M. (2003):** “Robustness properties of multivariate EWMA control charts”, *Quality and reliability engineering international* 19, pp: 31-38.

**THEODOSSIOU, P. T. (1993):** “Predicting shifts in the mean of multivariate time series process: an application in predicting business failures”, *Journal of the American Statistical Association* 88, pp: 441-447.

**TIMMER, D. H. , PIGNATIELLO, J. J. y LONGNECKER, M. (1998):** “The development and evaluation of CUSUM-based control charts for an AR(1) process”, *IIE Transactions* 30, pp: 525-534.

**TINNIRELLO, A. y GODOY, S. (2003):** “Integración del control estadístico de procesos y el modelado de series de tiempo”, *II Congreso Internacional de Matemática Aplicada a la Ingeniería y Enseñanza de la Matemática en Ingeniería (INMAT 2003)*, Buenos Aires.

**TODD, R. M. (1988):** “Implementing bayesian vector autoregressions”, *Federal Reserve Bank of Minneapolis*, Working Paper n° 384.

**TRACY, N. D. , YOUNG, J. C. y MASON, R. L. (1992):** “Multivariate control charts for individual observations”, *Journal of Quality Technology* 24, pp: 88-95.

**TSAY, R. S. (2000):** “Notes on univariate time series analysis”, *University of Chicago*, Graduate School of Business, Documento Interno.

**TSUNG, F. y APLEY, D. W. (2002):** “The dynamic T-squared chart for monitoring feedback-controlled processes”, *IIE Transactions* 34, pp: 1043-1053.

**TUKEY, J. W. (1970):** *Exploratory data analysis*, Addison-Welsley.

**URIEL, E. (1995):** *Análisis de datos: Series temporales y Análisis multivariante*. Thomson.

**URIEL, E. y PEIRÓ, A. (2000):** *Introducción al Análisis de Series Temporales*. Thomson.

**VACCARO, R. J. y VUKINA, T. (1993) :** “A solution to the positivity problem in the state-space approach to modeling vector-valued time series”, *Journal of Economic Dynamics and Control* 17, pp: 401-421.

**VAN OVERSCHEE, P. y DEMOOR, B. (1994):** “N4sid: Subspace Algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic systems” , *Automatica* 30 , pp: 75-93.

**VANCE, L. C. (1986):** “Average run lengths of cumulative sum control charts for controlling normal means” , *Journal of quality technology* 18, pp: 189-193.

**VANDER WIEL, S. A. (1996):** “Monitoring processes that wander using integrated moving averages”, *Technometrics* 38, pp: 139-151.

**VARGAS, J. A. (2003):** “Robust Estimation in Multivariate Control Charts for Individual Observations”, *Journal of Quality Technology* 35, pp: 367-376.

**VARGAS, M. (1999a):** “*Modelización de series temporales múltiples en espacio de estados. Análisis de procesos no estacionarios y cointegración*”. Tesis doctoral, Universidad de Castilla-La Mancha.

**VARGAS, M. (1999b):** “Modelización de series temporales estacionarias en espacio de estados”, *Documentos de trabajo de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de Albacete* (Doc: 2/1999/4).

[http://www.uclm.es/AB/fcee/D\\_trabajos/2-99-4.pdf](http://www.uclm.es/AB/fcee/D_trabajos/2-99-4.pdf)

**VARGAS, M. y GÁMEZ, M. (1995):** “Modelización dinámico-bayesiana de series temporales univariantes”, *IX Reunión Asepelt-España*, Santiago de Compostela.

**VASILOPOULOS, A. V. y STAMBOULIS, A. P. (1978):** “Modification of control chart limits in the presence of data correlation”, *Journal of Quality Technology* 10, pp: 20-30.

**VERHAEGEN, M. (1994):** “Identification of the deterministic part of mimo state space models given in innovations form from input-output data” , *Automatica* 30, pp: 61-74.

**VERMAAT, M. B. , ION, R. A. , DOES, R. J. y KLAASSEN, C. A. (2003):** “A comparison of Shewhart individuals control charts based on normal, non-parametric and extreme-value theory”, *Quality and reliability engineering international* 19, pp: 337-353.

**WADSWORTH, H. M. , STEPHENS, K. S. y GODFREY, A. B. (1986) :** *Modern Methods for Quality Control and Improvement*, John Wiley & Sons.

**WARDELL, D. G. , MOSKOWITZ, H. y PLANTE, R. D. (1992) :** “Control charts in the presence of data correlation”, *Management Science* 38, pp:1084-1104.

**WARDELL, D. G. , MOSKOWITZ, H. y PLANTE, R. D. (1994) :** “Run-length distributions of special-cause control charts for correlated processes”, *Technometrics* 36, pp:3-17.

**WHEELER, D. J. (1989):** “Shewhart’s control charts: Foundations & myths”, *Quality Digest*, pp: 32-39.

**WIERINGA, J. E. (1998):** “Control charts for monitoring the mean of AR(1) data”. En 54<sup>th</sup> Annual Quality Conference 1998 Transactions, *American Society for Quality Rochester Section*, pp: 67-103.

**WIERINGA, J. E. (1999):** *Statistical Process control for serially correlated data*. Thesis proposal, University of Groningen, Groningen.

<http://dissertations.ub.rug.nl/FILES/faculties/eco/1999/j.e.wieringa/thesis.pdf>

**WILLEMAIN, T. R. y RUNGER, G. C. (1996):** “Designing control charts using an empirical reference distribution”, *Journal of Quality Technology* 28, pp: 31-38.

**WILLEMS, G. , PISON, G. , ROUSSEEUW, P. J. y VAN AELST, S. (2003):** “A robust Hotelling test”. En DUTTER, FILZMOSE, GATHER y ROUSSEEUW(Eds): *Development in robust statistics*, Physical-Verlag, pp: 417-431.

**WISNOWSKI, J. W. , SIMPSON, J. R. y MONTGOMERY, D. C. (2002):** “A performance study for multivariate location and shape estimators”, *Quality and reliability engineering international* 18, pp: 117-129.

**WOODALL, W. H. (1986):** “The design of CUSUM quality control charts”, *Journal of Quality Technology* 18, pp: 99-102.

**WOODALL, W. H. y ADAMS, B. M. (1993):** “The statistical design of CUSUM charts”, *Quality Engineering* 5, pp:559-570.

**WOODALL, W. H. y MONTGOMERY, D. C. (2000):** “Using ranges to estimate variability”, *Quality Engineering* 13, pp: 211-217.

**WOODALL, W. H. y NCUBE, M. M. (1985):** “Multivariate CUSUM quality-control procedures”, *Technometrics* 27, pp: 285-292.

**WOODRUFF, D. L. y ROCKE, D. M. (1994):** “Computable robust estimation of multivariate location and shape in high dimension using compound estimators”, *Journal of the American Statistical Association* 89, pp:888-896..

**YI DOU y PING SA (2002):** “One-side control charts for the mean of positively skewed distributions”, *Total Quality Management* 13, No 7.

**YOUNG, J. C., ALLOWAY, T. y SCHMOTZER, R. (2000):** “Introduction to multivariate statistical process control and its application in the process industries”, *National Petrochemical & Refiners Association (NPRA) Computer Conference*, Chicago, Illinois.

**YOUNG, P., NG, C. y ARMITAGE, P. (1989):** “A systems approach to recursive economic forecasting and seasonal adjustment”, *Computer Mathematic Applications* 18, pp: 481-501.

**YOURSTONE, S. A. y ZIMMER, W. J. (1992):** “Non-normality and the Design of Control Charts for Averages”, *Decision Sciences* 23, pp: 1099-1113.

**ZHANG, N. F. (1998):** “A statistical control chart for stationary process data”, *Technometrics* 40, pp: 24-38.



# **APÉNDICES**





## APÉNDICE A

### MÉTODOS DE ESTIMACIÓN

#### A.1- Estimación por mínimos cuadrados de los valores de un modelo VAR(p)

Para obtener el estimador por mínimos cuadrados múltiples para la estimación de los valores correspondientes del modelo, lo primero que vamos a hacer es simplificar la notación del modelo VAR(p) general denotado como:

$$X_t = \mu + \Phi_1 X_{t-1} + \Phi_2 X_{t-2} + \dots + \Phi_p X_{t-p} + U_t$$

Para ello definiendo<sup>110</sup>:

$$X = (x_1, \dots, x_n) \quad (k \times n)$$

$$B = (\mu, \mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_p) \quad (k \times (kp+1))$$

---

<sup>110</sup> Los valores recogidos entre paréntesis a la derecha denotan el orden de las matrices correspondientes.

$$Z_t = \begin{bmatrix} 1 \\ x_t \\ \vdots \\ x_{t-p+1} \end{bmatrix} \quad ((kp+1) \times 1)$$

$$Z = (Z_0, \ddot{y}, Z_{n-1}) \quad (kp+1) \times n$$

$$U = (u_1, \ddot{y}, u_n) \quad (k \times n)$$

$$x = \text{vec}(X) \quad (Kn \times 1)$$

$$\beta = \text{vec}(B) \quad ((k^2p+k) \times 1)$$

$$b = \text{vec}(B')$$

$$u = \text{vec}(U) \quad (Kn \times 1)$$

Podemos obtener usando la notación anterior el modelo mediante una notación simplificada como:

$$Y = BZ + U$$

Otras formulaciones alternativas pueden ser:

$$\begin{aligned} \text{vec}(X) &= \text{vec}(BZ) + \text{vec}(U) = (Z' \otimes I_k) \text{vec}(B) + \text{vec}(U) \\ x &= (Z' \otimes I_k) \beta + u \end{aligned}$$

El estimador obtenido por mínimos cuadrados múltiples para  $\beta$  supone determinar el estimador que minimice:

$$\begin{aligned} S(\beta) &= u' (I_n \otimes \Sigma_u^{-1}) u = (x - (Z' \otimes I_k) \beta)' (I_n \otimes \Sigma_u^{-1}) (x - (Z' \otimes I_k) \beta) = \\ &= \text{vec}(X - BZ)' (I_n \otimes \Sigma_u^{-1}) \text{vec}(X - BZ) = \text{tr}[(X - BZ)' \Sigma_u^{-1} (X - BZ)] \end{aligned}$$

Para encontrar el mínimo de esta función hay que advertir que:

$$\begin{aligned} S(\beta) &= x' (I_n \otimes \Sigma_u^{-1}) x + \beta' (Z \otimes \Sigma_u^{-1}) (Z' \otimes I_k) \beta - 2 \beta' (Z \otimes I_k) (I_n \otimes \Sigma_u^{-1}) x = \\ &= x' (I_n \otimes \Sigma_u^{-1}) x + \beta' (Z Z' \otimes \Sigma_u^{-1}) \beta - 2 \beta' (Z \otimes \Sigma_u^{-1}) x \end{aligned}$$

De aquí que:

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = 2 (Z Z' \otimes \Sigma_u^{-1}) \beta - 2 (Z \otimes \Sigma_u^{-1}) x$$

Igualando a cero da las ecuaciones normales:

$$(Z Z' \otimes \Sigma_u^{-1}) \hat{\beta} = (Z \otimes \Sigma_u^{-1}) x$$

y, por lo tanto, el estimador por mínimos cuadrados múltiples para el parámetro  $\beta$  es:

$$\hat{\beta} = ((Z Z')^{-1} \otimes \Sigma_u^{-1}) (Z \otimes \Sigma_u^{-1}) x = ((Z Z')^{-1} Z \otimes I_k) x$$

El Hessiano de  $S(\beta)$  es:

$$\frac{\partial^2 S(\beta)}{\partial \beta \partial \beta'} = 2 (Z Z' \otimes \Sigma_u^{-1})$$

que es definida positiva y confirma que  $\hat{\beta}$  es en efecto un vector mínimo. Este resultado es válido asumiendo que  $ZZ'$  es una matriz no singular.

## A.2- Estimación máximo verosímil de un modelo VAR(p)

Si consideramos que la distribución del proceso es normal, podemos obtener estimaciones de los parámetros del proceso mediante máxima verosimilitud. Al suponer el comportamiento del proceso normal, estamos considerando que:

$$u = \text{vec}(U) = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \sim N(0, I_n \otimes \Sigma_u)$$

En otras palabras, la función de densidad de  $u$  es de la forma:

$$f_u(u) = \frac{1}{(2\pi)^{kn/2}} |I_n \otimes \Sigma_u|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} u' (I_n \otimes \Sigma_u^{-1}) u\right]$$

Usando la notación desarrollada en el apéndice 1 obtenemos que el logaritmo de la función de verisimilitud es:

$$\ln l(\beta, \Sigma_u) = -\frac{kn}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln |\Sigma_u| - \frac{1}{2} [x - (Z' \otimes I_k) \beta]' (I_n \otimes \Sigma_u^{-1}) [x - (Z' \otimes I_k) \beta]$$

La primera derivada parcial con respecto a  $\beta$  es:

$$\frac{\partial \ln l}{\partial \beta} = (Z \otimes \Sigma_u^{-1}) x - (Z Z' \otimes \Sigma_u^{-1}) \beta$$

Igualando a cero y resolviendo para obtener  $\beta$  nos quedaría que el estimador de  $\beta$  obtenido por máxima verosimilitud va a tomar el valor:

$$\tilde{\beta} = ((Z Z')^{-1} Z \otimes I_k) x$$

Valor que en el caso de que no existan restricciones en el comportamiento de  $\beta$  va a coincidir con el estimador obtenido por mínimos cuadrados. Además el

máximo de la función de verosimilitud con respecto a  $\mathbf{G}_u$  es obtenido, para el caso en el que no existan restricciones en el comportamiento de  $\beta$ , como:

$$\tilde{\Sigma}_u = \frac{1}{n} (X - \tilde{B} Z) (X - \tilde{B} Z)'$$

donde  $\tilde{B}$  es la matriz de coeficientes correspondiente a  $\beta$ , es decir,  $\beta = \text{vec}(\tilde{B})$ .

### A.3- Regresión Cresta y estimación mixta

Ambos métodos están orientados a la mejora de la calidad de la estimación obtenida por mínimos cuadrados ordinarios (MCO) de los parámetros del modelo lineal general. En concreto, la regresión cresta trata de incrementar la precisión de los estimadores mientras que la estimación mixta permite la inclusión de información a priori de naturaleza inexacta en el proceso de estimación. Desde una perspectiva BVAR, la regresión cresta va a ser el elemento que nos va a permitir mejorar el rendimiento estadístico de los estimadores MCO en un contexto VAR y la estimación mixta nos va a permitir incorporar de forma explícita la información a priori, es decir, la regresión en cresta va a recoger la motivación de los modelos VAR y la estimación mixta el instrumento con el que conseguir nuestros objetivos.

#### Regresión cresta

La regresión cresta está incluida dentro de los denominados estimadores contraídos y trata de corregir las consecuencias adversas de la falta de identificación de la matriz de diseño  $X$  en la obtención del estimador por mínimos cuadrados del modelo lineal general, introduciendo para ello información adicional en forma de restricciones. Como se puede observar, uno de los objetivos que vamos a perseguir con el uso de los modelos BVAR es añadir información a priori en el modelo.

Los estimadores cresta se obtienen como la solución de un planteamiento de mínimos cuadrados condicionados, donde el condicionamiento recoge una restricción al tamaño de la suma de cuadrados de  $\beta$ . Estos mínimos cuadrados condicionados se plantean en los siguientes términos:

$$\underset{\beta}{\text{MIN}} S(\beta) = (Y - X\beta)'(Y - X\beta) \quad \text{s. a} \quad \beta'\beta \leq C^2$$

donde C es un parámetro que marca el radio de la esfera centrada en cero donde van a estar situados los valores de los parámetros estimados, de tal forma que conseguimos desplazar la solución MCO haciendo los  $\beta$  más pequeños y estabilizando los parámetros estimados.

El operador lagrangiano asociado al problema de minimización anterior es:

$$l(\beta, \lambda) = (Y - X\beta)'(Y - X\beta) + \lambda(\beta'\beta - C^2)$$

La resolución de este lagrangiano nos plantea la siguiente solución:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(\lambda) &= (X'X + \lambda I_k)^{-1} (X'Y) \\ \hat{\beta}(\lambda)' \hat{\beta}(\lambda) &= C^2 \end{aligned}$$

De tal forma que sustituyendo lambda por una función de C se obtiene el estimador cresta:

$$\hat{\beta}(\lambda(C)) = (X'X + \lambda(C) I_k)^{-1} (X'Y)$$

El estimador cresta va a depender de la elección a priori del valor de C que va a determinar el tamaño de los estimadores de  $\beta$ , de tal forma que si el valor de  $C = 4$  la restricción no es vinculante ( $\beta = 0$ ), por lo que el estimador cresta coincide con el estimador MCO. Por contra, si  $C = 0$  la restricción equivale a eliminar la función objetivo en el operador lagrangiano ( $\beta = 4$ ) por lo que el estimador cresta toma un valor cero.

Desde un punto de vista bayesiano, la restricción refleja un comportamiento a priori acerca de los parámetros  $\beta$ , concretamente sobre su tamaño considerando los valores pequeños de  $\beta$  más verosímiles que los grandes, de tal forma que si  $\beta = 0$  el analista confía en pleno en las restricciones ignorando la información muestral y considerando el estimador cresta nulo, y si  $\beta \neq 0$  el analista desconfía en el comportamiento a priori y se guiará por la información muestral considerando por lo tanto el estimador cresta igual al estimador MCO.

La elección de este parámetro  $\beta$  juega un papel fundamental, si bien, aunque no existe ningún criterio automático para seleccionar este parámetro Hoerl y Kennard (1970) proponen basar la elección de  $\beta$  en que: genere estimadores estables, en el sentido de que pequeños cambios en  $\beta$  no den lugar a abruptas variaciones en los valores estimados; los valores absolutos sean de un tamaño razonable, que el signo sea el correcto; y el error cuadrático medio no esté inflado.

Este último elemento es fundamental, ya que el estimador cresta es sesgado y, por lo tanto, la ventaja frente al MCO se encuentra basada en una varianza significativamente inferior.

### Estimación mixta

El objetivo final que se persigue con la estimación mixta, igual que ocurría con la regresión cresta, es restringir el comportamiento de los estimadores  $\beta$ , pero a diferencia de la regresión cresta, en este caso se considera sus componentes de forma diferenciada y sopesando la información a priori para cada uno de los elementos del vector  $\beta$ .

Se considera que el vector de parámetros  $\beta$  satisface un conjunto de restricciones lineales de forma inexacta. La incertidumbre acerca de dichas restricciones se representa mediante la inclusión de un vector de perturbaciones  $w$  a las  $m$  restricciones establecidas sobre cada uno de los elementos del vector  $\beta$  de la forma  $r = R\beta$ :



$$r = R\beta + w$$

Además, se considera que el vector  $w$  sigue una distribución normal con parámetros  $0$  y  $Q$  ( $w \sim N(0, Q)$ ). El modelo completo surge de la combinación del modelo lineal general ( $Y = X\beta + U$ ) y la ecuación anterior de la forma:

$$\begin{bmatrix} Y \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ R \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} U \\ w \end{bmatrix}$$

La matriz de varianzas-covarianzas de este modelo ampliado va a venir dada por:

$$\begin{bmatrix} \sigma^2 I_n & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

Estimando  $\beta$  por mínimos cuadrados generalizados obtenemos que:

$$\hat{\beta} = (\sigma^{-2} X'X + R'Q^{-1}R)^{-1} (\sigma^{-2} X'Y + R'Q^{-1}r)$$

De tal forma que si se consideran las restricciones fiables habrá que considerar la matriz de varianzas-covarianzas  $Q$  reducida, por lo que el estimador  $\beta$  estará determinado, principalmente, por las restricciones  $r = R\beta$ . Si por contra, se consideran las restricciones poco fiables,  $Q$  va a ser grande y el estimador mixto va a ser muy similar al obtenido por MCO, es decir, como si se considerara la información extramuestral.

Como ya hemos comentado anteriormente, esta estimación mixta junto con la regresión cresta constituyen la base del proceso de estimación de los modelos BVAR.

## **APÉNDICE B**

### **IMPLEMENTACIÓN EN R DEL ALGORITMO DE ESTIMACIÓN**

#### **B.1- Determinación del ARL de los gráficos CUSUM y EWMA**

Con el algoritmo presentado a continuación podemos determinar el valor del ARL para distintos cambios en el vector de medias ( $\mu$ ) medidos en número de desviaciones típicas, en función del valor que fijemos para el parámetro  $k$  (normalmente 0.5 o la mitad del cambio que se quiere detectar), el valor crítico ( $h$ ) y la especificación de si estamos considerando un esquema CUSUM para controlar cambios en una dirección ( $sided = "one"$ ) o cambios en dos direcciones ( $sided = "two"$ ). Especificando el valor de estos parámetros es sencillo obtener los valores críticos correspondientes mediante el algoritmo (incluido en el paquete SPC):

```
xcusum.arl<- function (k, h, mu, hs = 0, sided = "two", r = 30){  
  if (k < 0)      stop("k has to be non-negative")  
  if (h <= 0)     stop("h has to be positive")  
  if (hs < 0 | (sided == "two" & hs > h/2 + k) | (sided == "one" & hs > h/2 + k))  
    stop("wrong headstart")
```

```

if (r < 4)      stop("r is too small")
ctyp <- pmatch(sided, c("one", "two", "Crosier")) - 1
if (is.na(ctyp)) stop("invalid cusum type")
arl <- .C("xcusum_arl", as.integer(ctyp), as.double(k), as.double(h),
  as.double(hs), as.double(mu), as.integer(r), ans = double(length = 1),
  PACKAGE = "spc")$ans
names(arl) <- "arl"
return(arl)
}

```

Para el gráfico EWMA, el algoritmo que aparece a continuación es utilizado para determinar el valor del ARL para distintos cambios en el vector de medias ( $\mu$ ) medidos en número de desviaciones típicas, en función del valor que fijemos para el parámetro  $\lambda$  ( $L$ ), el valor crítico  $\omega$  y la especificación de si estamos considerando un esquema EWMA para controlar cambios en una dirección ( $sided = "one"$ ) o cambios en dos direcciones ( $sided = "two"$ ). Especificando el valor de estos parámetros es sencillo obtener los valores críticos correspondientes mediante el algoritmo (incluido en el paquete SPC):

```

xewma.arl <- function (lambda, L, mu, zr = 0, hs = 0, sided = "two", limits =
"fix", r = 40){ if (lambda <= 0 || lambda > 1)      stop("lambda has to be between
0 and 1")
  if (L <= 0)      stop("L has to be positive")
  if (zr > L & sided == "one")      stop("wrong reflexion border")
  if ((sided == "two" & abs(hs) > L) | (sided == "one" & (hs < zr | hs > L)))
    stop("wrong headstart")
  if (r < 4)      stop("r is too small")
  ctyp <- pmatch(sided, c("one", "two")) - 1
  if (is.na(ctyp)) stop("invalid ewma type")
  ltyp <- pmatch(limits, c("fix", "vacl", "fir", "both", "Steiner",
    "Knoth")) - 1
  if (is.na(ltyp)) stop("invalid limits type")
  arl <- .C("xewma_arl", as.integer(ctyp), as.double(lambda), as.double(L),
    as.double(zr), as.double(hs), as.double(mu), as.integer(ltyp),
    as.integer(r), ans = double(length = 1), PACKAGE = "spc")$ans
  names(arl) <- "arl"
  return(arl)
}

```

## B.2- Estimación de la matriz de Hankel

```

datos<- read.table ("jamonero.txt",header=T)
Np<- 3
Nf<- 3
data.est<- function(Y){
  m<-length(Y[,1])
  p<-length(Y[1,])
  data.est <-array(c(0),c(m,p))
  for(i in 1:p){data.est[,i]<- (datos[,i]-mean(datos[,i]))/sqrt(var(datos[,i]))
  }
  data.est
}
data.est<- data.est(datos)
data.acf <- acf (data.est, lag.max=11, type="correlation", plot=F)

h<- function(Y){
  m<-length(Y[,1])
  p<-length(Y[1,])
  h <- array(c(0),c(Nf*p,Np*p))
  h[1:p,1:p]<-data.acf$acf[2,,]
  h[1:p,(p+1):(2*p)]<-data.acf$acf[3,,]
  h[1:p,(2*p+1):(3*p)]<-data.acf$acf[4,,]
  h[(p+1):(2*p),1:p]<-data.acf$acf[3,,]
  h[(p+1):(2*p),(p+1):(2*p)]<-data.acf$acf[4,,]
  h[(p+1):(2*p),(2*p+1):(3*p)]<-data.acf$acf[5,,]
  h[(2*p+1):(3*p),1:p]<-data.acf$acf[4,,]
  h[(2*p+1):(3*p),(p+1):(2*p)]<-data.acf$acf[5,,]
  h[(2*p+1):(3*p),(2*p+1):(3*p)]<-data.acf$acf[6,,]
  h
}
h<- h(datos)      # Matriz de Hankel
h.svd <- svd(h)   # Descomposición en valores singulares de la matriz de
                  # Hankel.

```

### B.3- Determinación del número de estados

```

data.menos<- function(Y){
  m<-length(Y[,1])
  p<-length(Y[1,])
data.menos<-array(c(0),c(m,Np*p))
  for(i in 1:m){if(i<Np+1){data.menos[i,1:p]<- array(c(0),c(1,p))
    data.menos[i,(p+1):(2*p)]<- array(c(0),c(1,p))
    data.menos[i,(2*p+1):(3*p)]<- array(c(0),c(1,p))
  }
  else{data.menos[i,1:p]<- data.est[i-1,]
    data.menos[i,(p+1):(2*p)]<- data.est[i-2,]
    data.menos[i,(2*p+1):(3*p)]<- data.est[i-3,]
  }

  }
data.menos
}
data.menos<- data.menos(datos)

data.mas<- function(Y){
  m<-length(Y[,1])
  p<-length(Y[1,])
data.mas<-array(c(0),c(m,Nf*p))
  for(i in 1:m-Nf+1){if(i<=Np+1){data.mas[i,1:p]<- array(c(0),c(1,p))
    data.mas[i,(p+1):(2*p)]<- array(c(0),c(1,p))
    data.mas[i,(2*p+1):(3*p)]<- array(c(0),c(1,p))
    data.mas[i,(3*p+1):(4*p)]<- array(c(0),c(1,p))
    data.mas[i,(4*p+1):(5*p)]<- array(c(0),c(1,p))
    data.mas[i,(5*p+1):(6*p)]<- array(c(0),c(1,p))
    data.mas[i,(6*p+1):(7*p)]<- array(c(0),c(1,p))
    data.mas[i,(7*p+1):(8*p)]<- array(c(0),c(1,p))
  }
  else{data.mas[i,1:p]<- data.est[i,]
    data.mas[i,(p+1):(2*p)]<- data.est[i+1,]
    data.mas[i,(2*p+1):(3*p)]<- data.est[i+2,]
    data.mas[i,(3*p+1):(4*p)]<- data.est[i+3,]
    data.mas[i,(4*p+1):(5*p)]<- data.est[i+4,]
    data.mas[i,(5*p+1):(6*p)]<- data.est[i+5,]
    data.mas[i,(6*p+1):(7*p)]<- data.est[i+6,]
    data.mas[i,(7*p+1):(8*p)]<- data.est[i+Nf-1,]
  }

  }
data.mas
}

```

```

data.mas<- data.mas(datos)
coef.corr.can<- cancelor(data.mas,data.menos)$cor

bartlett<- function(x,y){# Estadístico de Bartlett donde x recoge las
observaciones que tenemos e y los coeficientes de correlación canónica.
  n<-length(x[,1])
  p<-length(x[1,])
  q<-length(y[,1])
  bartlett<- data.frame(rep(0,q-1))
  f o r ( i i n 1 : q - 1 ) { b a r t l e t [ i , ] < -
-(n-(1/2)*(p*(np+nf)+1))*log(prod(1-(y[(i+1):q,])^2)
  ,base=exp(1))
  }
  bartlett
}

chi<- function(x,y){ # Determinación valor de corte
  n<-length(x[,1])
  p<-length(x[1,])
  q<-length(y[,1])
  chi<- data.frame(rep(0,q-1))
  for(i in 1:q-1){chi[i,]<- qchisq(0.05,((p*nf-i)*(p*np-i)),lower.tail=F)
  }
  chi
}
graf.bartlett<- function(x,y){ # Estadístico de Bartlett
  graf<- cbind(bartlett=bartlett(x,y),Valorcorte=chi(x,y))
}

```

## B.4- Estimación del modelo en espacio de los estados

```

est<- 4 # Número de estados dado por el algoritmo de especificación
som<- function(Y){
  m<-length(Y[,1])
  p<-length(Y[1,])
  som<-array(c(0),c(Np*p,est))
  for(i in 1:est){som[i,i]<- 1
  }
  som
}
som<- som(datos)
o<- h.svd$u%*%diag(sqrt(h.svd$d))
o.hat<- -o%*%som
ipilon<- diag(sqrt(h.svd$d))%*%t(h.svd$v)
ipilon.hat<- -t(som)%*%ipilon

```

```

fila.hat<- function(Y){
  m<-length(Y[,1])
  p<-length(Y[1,])
  fila.hat<-array(c(0),c(Nf*p,p))
  for(i in 1:p){ fila.hat[i,i]<- 1
    }
  fila.hat
}
fila.hat<- fila.hat(datos)
h.hat<- t(fila.hat)%*%o.hat#{Estimación de la matriz de ponderaciones de los
estados.}
o.menos<- (sqrt(diag(h.svd$d^(-1))))%*%t(h.svd$u)
ipsilon.menos<- h.svd$v%*%(sqrt(diag(h.svd$d^(-1))))

h.shift<- function(Y){
  m<-length(Y[,1])
  p<-length(Y[1,])
  h.shift<- array(c(0),c(Nf*p,Np*p))
  h.shift[1:p,1:p]<-data.acf$acf[3,,]
  h.shift[1:p,(p+1):(2*p)]<-data.acf$acf[4,,]
  h.shift[1:p,(2*p+1):(3*p)]<-data.acf$acf[5,,]
  h.shift[(p+1):(2*p),1:p]<-data.acf$acf[4,,]
  h.shift[(p+1):(2*p),(p+1):(2*p)]<-data.acf$acf[5,,]
  h.shift[(p+1):(2*p),(2*p+1):(3*p)]<-data.acf$acf[6,,]
  h.shift[(2*p+1):(3*p),1:p]<-data.acf$acf[5,,]
  h.shift[(2*p+1):(3*p),(p+1):(2*p)]<-data.acf$acf[6,,]
  h.shift[(2*p+1):(3*p),(2*p+1):(3*p)]<-data.acf$acf[7,,]
  h.shift
}
h.shift<- h.shift(datos)
o.menoshat<- t(som)%*%o.menos
ipsilon.menoshat<- ipsilon.menos%*%som
f.hat<- o.menoshat%*%h.shift%*%ipsilon.menoshat # Estimación de la matriz
dinámica de evolución de los estados

data.menos<- function(Y){
  m<-length(Y[,1])
  p<-length(Y[1,])
  data.menos<-array(c(0),c(m,Np*p))
  for(i in 1:m){ if(i<Np+1){ data.menos[i,1:p]<- array(c(0),c(1,p))
    data.menos[i,(p+1):(2*p)]<- array(c(0),c(1,p))
    data.menos[i,(2*p+1):(3*p)]<- array(c(0),c(1,p))
    }
    else{ data.menos[i,1:p]<- data.est[i-1,]

```

```

        data.menos[i,(p+1):(2*p)]<- data.est[i-2,]
        data.menos[i,(2*p+1):(3*p)]<- data.est[i-3,]
    }
}
data.menos
}
data.menos<- data.menos(datos)
r<- var(data.menos)
r.inv<- solve(r)

x.hat<- function(Y){
    m<-length(Y[,1])
    p<-length(Y[1,])
    x.hat<-array(c(0),c(m,est))
    for(i in 1:m){if(i<Np+1){x.hat[i,]<- array(c(0),c(1,est))
        }
        else{x.hat[i,]<- t(ipsilon.hat%%r.inv%%t(t(data.menos[i,])))
        }
    }
}
x.hat
}
x.hat<- x.hat(datos)
x.hatacf <- var(x.hat)

e.hat<- function(Y){
    m<-length(Y[,1])
    p<-length(Y[1,])
    e.hat<-array(c(0),c(m,p))
    for(i in 1:m){e.hat[i,]<- t(t(data.est[i,])-h.hat%%t(x.hat[i,]))
    }
}
e.hat
}
e.hat<- e.hat(datos)
psi <- var (e.hat)
psi.inv <- solve(psi)

x.hatfor<- function(Y){
    m<-length(Y[,1])
    p<-length(Y[1,])
    x.hatfor<-array(c(0),c(m,est))
    for(i in 1:m){if(i==m){x.hatfor[i,]<- f.hat%%x.hat[i,]
        }
        else{x.hatfor[i,]<- x.hat[i+1,]
        }
    }
}

```



```

    }
x.hatfor
}
x.hatfor<- x.hatfor(datos)
x.t<- t(t(x.hatfor)-f.hat%%t(x.hat))
cover<- var(x.t,e.hat)
g.hat<- cover%%psi.inv #{Estimación de la matriz de actualización de los
estados.}

```

```

fact.com<- function(Y){
  m<-length(Y[,1])
  p<-length(Y[1,])
  eta.hat<- array(c(0),c(m+1,est))
  eta<- array(c(0),c(m,est))
  pp<- array(c(0),c(m+1,est,est))
  k<- array(c(0),c(m,est,p))
  sigma<- array(c(0),c(m,p,p))
  sigma.inv<- array(c(0),c(m,p,p))
  epsilon<- array(c(0),c(m,p))
  eta.hat[1,<]= array(c(0),c(1,est))
  pp[1,<]= x.hatacf
  for(i in 1:m){sigma[i,<]= h.hat%%pp[i,<]%%t(h.hat)+psi
    sigma.inv[i,<]= solve(sigma[i,<])
    k[i,<]= (f.hat %% pp[i,<]%%t(h.hat)+g.hat%% psi)%%sigma.inv[i,<]
    epsilon[i,<]= t(t(t(data.est[i,<]))-h.hat%%t(t(eta.hat[i,<])))
    eta[i,<]= t(t(t(eta.hat[i,<]))+pp[i,<]%%t(h.hat)%%sigma.inv[i,<]%%
    t(t(epsilon[i,<])))
    eta.hat[i+1,<]= t(f.hat%%t(t(eta.hat[i,<]))+k[i,<]%%t(t(epsilon[i,<])))
    p p [ i + 1 , , ] < -
f.hat%%pp[i,<]%%t(f.hat)+g.hat%%psi%%t(g.hat)-k[i,<]%%
sigma[i,<]%%t(k[i,<])
}
f a c t . c o m <-
list(eta.hat=eta.hat,eta=eta,pp=pp,k=k,sigma=sigma,sigma.inv=sigma.inv,
epsilon=epsilon)
}

```

```

a<- fact.com(datos) # Recursión del filtrado de Kalman para la obtención de los
estados.

```

## APÉNDICE C

### RESULTADOS DE LA ESTIMACIÓN

**C.1- Datos Originales :** Observaciones correspondientes a las 216 observaciones tomadas para cada una de las características de calidad.

Observaciones Originales											
	A	B	C	E	F		A	B	C	E	F
1	1,36	1,12	0,88	0,36	0,36	109	1,33	1,12	0,82	0,32	0,38
2	1,34	1,13	0,86	0,35	0,34	110	1,34	1,13	0,85	0,33	0,35
3	1,35	1,14	0,86	0,34	0,35	111	1,31	1,11	0,84	0,32	0,36
4	1,34	1,15	0,89	0,33	0,33	112	1,32	1,11	0,85	0,31	0,37
5	1,34	1,13	0,86	0,32	0,33	113	1,30	1,11	0,84	0,35	0,38
6	1,35	1,11	0,87	0,31	0,35	114	1,32	1,10	0,86	0,33	0,32
7	1,32	1,13	0,89	0,35	0,33	115	1,34	1,13	0,85	0,32	0,35
8	1,31	1,12	0,86	0,32	0,32	116	1,33	1,12	0,85	0,31	0,34
9	1,33	1,11	0,85	0,33	0,35	117	1,32	1,12	0,84	0,35	0,35
10	1,32	1,13	0,86	0,33	0,34	118	1,33	1,12	0,84	0,32	0,36
11	1,31	1,15	0,89	0,34	0,32	119	1,33	1,11	0,85	0,33	0,37
12	1,34	1,11	0,87	0,35	0,33	120	1,34	1,11	0,85	0,33	0,38
13	1,33	1,16	0,87	0,35	0,32	121	1,35	1,13	0,86	0,34	0,37
14	1,33	1,14	0,88	0,36	0,32	122	1,36	1,14	0,85	0,35	0,38
15	1,32	1,14	0,85	0,34	0,35	123	1,36	1,12	0,86	0,35	0,36
16	1,33	1,15	0,86	0,35	0,33	124	1,34	1,13	0,85	0,36	0,32
17	1,34	1,13	0,86	0,33	0,35	125	1,33	1,12	0,85	0,34	0,36
18	1,34	1,16	0,87	0,33	0,35	126	1,35	1,14	0,86	0,35	0,35
19	1,32	1,15	0,83	0,35	0,36	127	1,34	1,16	0,88	0,36	0,38
20	1,33	1,14	0,85	0,33	0,35	128	1,31	1,12	0,84	0,35	0,34
21	1,34	1,16	0,85	0,32	0,35	129	1,32	1,12	0,85	0,38	0,36
22	1,33	1,13	0,86	0,35	0,35	130	1,31	1,12	0,86	0,34	0,38

Observaciones Originales											
	A	B	C	E	F		A	B	C	E	F
23	1,31	1,13	0,86	0,34	0,36	131	1,32	1,13	0,88	0,36	0,37
24	1,32	1,15	0,88	0,33	0,35	132	1,33	1,13	0,87	0,38	0,35
25	1,31	1,13	0,83	0,34	0,35	133	1,32	1,12	0,83	0,37	0,35
26	1,33	1,12	0,84	0,33	0,36	134	1,30	1,12	0,85	0,35	0,35
27	1,33	1,11	0,86	0,34	0,38	135	1,28	1,12	0,86	0,35	0,35
28	1,34	1,11	0,86	0,33	0,37	136	1,32	1,11	0,88	0,36	0,37
29	1,32	1,12	0,84	0,35	0,39	137	1,30	1,11	0,90	0,37	0,37
30	1,32	1,13	0,86	0,36	0,38	138	1,33	1,11	0,88	0,39	0,37
31	1,31	1,13	0,83	0,35	0,37	139	1,32	1,12	0,87	0,38	0,39
32	1,30	1,16	0,85	0,34	0,33	140	1,33	1,10	0,88	0,38	0,38
33	1,31	1,15	0,86	0,32	0,35	141	1,34	1,11	0,85	0,39	0,39
34	1,32	1,11	0,86	0,33	0,35	142	1,35	1,12	0,84	0,36	0,36
35	1,33	1,11	0,88	0,32	0,36	143	1,34	1,13	0,85	0,38	0,39
36	1,33	1,16	0,86	0,32	0,35	144	1,33	1,13	0,85	0,35	0,38
37	1,34	1,16	0,89	0,35	0,35	145	1,33	1,13	0,88	0,36	0,38
38	1,33	1,14	0,85	0,33	0,35	146	1,35	1,14	0,85	0,38	0,39
39	1,33	1,13	0,86	0,35	0,36	147	1,35	1,15	0,86	0,35	0,39
40	1,33	1,10	0,86	0,35	0,35	148	1,34	1,12	0,88	0,33	0,36
41	1,33	1,14	0,87	0,36	0,35	149	1,34	1,13	0,86	0,35	0,38
42	1,35	1,13	0,88	0,35	0,36	150	1,35	1,14	0,88	0,35	0,35
43	1,33	1,12	0,86	0,35	0,35	151	1,36	1,14	0,86	0,37	0,33
44	1,34	1,13	0,87	0,36	0,33	152	1,35	1,16	0,87	0,37	0,35
45	1,33	1,13	0,86	0,35	0,33	153	1,34	1,15	0,88	0,37	0,35
46	1,32	1,12	0,86	0,33	0,33	154	1,33	1,15	0,88	0,39	0,37
47	1,33	1,11	0,87	0,33	0,32	155	1,35	1,15	0,86	0,38	0,37
48	1,31	1,10	0,82	0,34	0,32	156	1,33	1,14	0,85	0,39	0,37
49	1,31	1,13	0,83	0,35	0,35	157	1,36	1,15	0,83	0,36	0,35
50	1,31	1,13	0,85	0,35	0,38	158	1,35	1,15	0,85	0,38	0,35
51	1,32	1,12	0,86	0,36	0,38	159	1,34	1,15	0,85	0,35	0,34
52	1,32	1,10	0,86	0,35	0,35	160	1,35	1,14	0,86	0,36	0,37
53	1,33	1,12	0,89	0,35	0,35	161	1,36	1,15	0,88	0,35	0,35
54	1,31	1,13	0,87	0,36	0,32	162	1,33	1,14	0,85	0,35	0,35
55	1,33	1,13	0,89	0,35	0,33	163	1,34	1,14	0,84	0,33	0,36
56	1,32	1,14	0,85	0,35	0,32	164	1,33	1,12	0,86	0,35	0,35
57	1,35	1,13	0,88	0,36	0,34	165	1,36	1,13	0,85	0,36	0,35
58	1,35	1,12	0,87	0,35	0,33	166	1,32	1,13	0,84	0,37	0,36
59	1,32	1,13	0,88	0,35	0,32	167	1,34	1,13	0,83	0,38	0,36
60	1,33	1,12	0,89	0,36	0,31	168	1,33	1,13	0,85	0,32	0,34
61	1,32	1,10	0,86	0,35	0,35	169	1,35	1,12	0,86	0,35	0,33
62	1,34	1,11	0,88	0,35	0,32	170	1,34	1,15	0,85	0,34	0,35
63	1,32	1,13	0,86	0,36	0,35	171	1,33	1,16	0,86	0,35	0,34
64	1,33	1,14	0,88	0,35	0,36	172	1,35	1,15	0,85	0,36	0,35
65	1,32	1,10	0,89	0,34	0,35	173	1,35	1,15	0,84	0,37	0,33

Observaciones Originales											
	A	B	C	E	F		A	B	C	E	F
66	1,32	1,11	0,87	0,33	0,35	174	1,33	1,14	0,86	0,38	0,33
67	1,35	1,11	0,88	0,32	0,39	175	1,33	1,14	0,85	0,37	0,35
68	1,34	1,13	0,89	0,31	0,38	176	1,35	1,12	0,81	0,38	0,34
69	1,33	1,10	0,86	0,35	0,38	177	1,32	1,12	0,82	0,36	0,32
70	1,32	1,08	0,89	0,32	0,39	178	1,33	1,12	0,82	0,32	0,35
71	1,32	1,09	0,88	0,35	0,36	179	1,33	1,10	0,85	0,35	0,34
72	1,32	1,12	0,90	0,36	0,38	180	1,34	1,12	0,81	0,35	0,32
73	1,30	1,13	0,88	0,35	0,35	181	1,35	1,10	0,83	0,35	0,31
74	1,32	1,12	0,88	0,35	0,36	182	1,33	1,11	0,86	0,36	0,32
75	1,33	1,16	0,87	0,35	0,38	183	1,34	1,12	0,84	0,35	0,32
76	1,33	1,13	0,85	0,36	0,35	184	1,33	1,11	0,83	0,36	0,33
77	1,33	1,17	0,86	0,35	0,33	185	1,34	1,12	0,85	0,35	0,33
78	1,32	1,16	0,86	0,35	0,35	186	1,32	1,10	0,82	0,34	0,32
79	1,33	1,13	0,85	0,32	0,35	187	1,33	1,11	0,83	0,35	0,32
80	1,29	1,16	0,86	0,35	0,37	188	1,34	1,12	0,82	0,33	0,32
81	1,30	1,15	0,88	0,34	0,32	189	1,33	1,12	0,83	0,30	0,33
82	1,31	1,13	0,90	0,33	0,31	190	1,34	1,12	0,83	0,35	0,33
83	1,31	1,13	0,89	0,35	0,35	191	1,34	1,13	0,82	0,35	0,35
84	1,32	1,12	0,88	0,36	0,32	192	1,33	1,11	0,83	0,32	0,35
85	1,33	1,14	0,89	0,38	0,35	193	1,33	1,11	0,82	0,33	0,32
86	1,32	1,16	0,89	0,37	0,36	194	1,33	1,10	0,83	0,35	0,32
87	1,32	1,16	0,88	0,39	0,35	195	1,34	1,12	0,82	0,32	0,33
88	1,32	1,14	0,87	0,38	0,35	196	1,34	1,12	0,84	0,35	0,34
89	1,31	1,16	0,88	0,37	0,35	197	1,33	1,14	0,81	0,32	0,33
90	1,31	1,14	0,90	0,39	0,38	198	1,31	1,12	0,83	0,31	0,33
91	1,33	1,16	0,90	0,40	0,38	199	1,30	1,10	0,82	0,33	0,32
92	1,33	1,15	0,88	0,41	0,39	200	1,33	1,13	0,83	0,34	0,33
93	1,32	1,16	0,88	0,40	0,38	201	1,32	1,14	0,84	0,32	0,34
94	1,32	1,14	0,88	0,39	0,38	202	1,35	1,10	0,83	0,34	0,32
95	1,34	1,12	0,87	0,35	0,37	203	1,33	1,09	0,82	0,33	0,33
96	1,34	1,13	0,89	0,38	0,33	204	1,34	1,12	0,83	0,34	0,31
97	1,34	1,12	0,88	0,38	0,35	205	1,33	1,13	0,82	0,33	0,34
98	1,34	1,10	0,86	0,39	0,37	206	1,33	1,14	0,81	0,34	0,33
99	1,32	1,10	0,84	0,38	0,36	207	1,34	1,10	0,82	0,33	0,35
100	1,32	1,11	0,85	0,38	0,37	208	1,33	1,10	0,81	0,33	0,32
101	1,31	1,10	0,84	0,37	0,39	209	1,34	1,12	0,83	0,32	0,36
102	1,32	1,13	0,83	0,33	0,38	210	1,34	1,12	0,82	0,31	0,31
103	1,31	1,11	0,84	0,35	0,38	211	1,35	1,13	0,83	0,33	0,32
104	1,32	1,13	0,82	0,37	0,39	212	1,32	1,13	0,82	0,32	0,33
105	1,32	1,13	0,83	0,38	0,36	213	1,32	1,12	0,82	0,33	0,32
106	1,31	1,11	0,85	0,38	0,38	214	1,33	1,13	0,82	0,32	0,32
107	1,33	1,11	0,82	0,35	0,35	215	1,33	1,12	0,83	0,34	0,33
108	1,31	1,11	0,83	0,35	0,36	216	1,32	1,11	0,81	0,32	0,35

## C.2- Residuos procedentes de la modelización independiente de cada variable<sup>111</sup>

Residuos modelización independiente											
	A	B	C	E	F		A	B	C	E	F
1	0,010	0,012	-0,005	-0,012	0,002	109	-0,023	-0,018	-0,001	-0,014	0,002
2	0,000	0,017	0,031	-0,016	-0,017	110	-0,004	-0,009	0,004	-0,019	0,015
3	0,210	-0,009	-0,013	-0,018	-0,011	111	-0,022	-0,007	-0,008	0,027	0,018
4	0,014	-0,020	0,001	-0,021	0,014	112	0,004	-0,017	0,014	-0,007	-0,049
5	-0,020	0,011	0,027	0,027	-0,015	113	0,020	0,017	-0,002	-0,017	0,006
6	-0,020	-0,007	-0,016	-0,017	-0,021	114	-0,001	-0,006	-0,004	-0,022	-0,002
7	0,009	-0,014	-0,019	-0,003	0,019	115	-0,012	-0,004	-0,011	0,027	0,005
8	-0,005	0,012	0,006	-0,004	-0,002	116	0,004	-0,003	-0,006	-0,017	0,013
9	-0,016	0,023	0,034	0,007	-0,025	117	0,002	-0,013	0,007	-0,003	0,015
10	0,020	-0,028	-0,003	0,011	-0,004	118	0,010	-0,008	0,002	-0,004	0,018
11	0,001	0,039	-0,003	0,005	-0,013	119	0,016	0,013	0,009	0,007	0,001
12	-0,002	-0,001	0,013	0,011	-0,011	120	0,021	0,013	-0,006	0,011	0,013
13	-0,010	0,004	-0,021	-0,014	0,021	121	0,015	-0,013	0,006	0,005	-0,009
14	0,004	0,016	0,001	0,002	-0,012	122	-0,008	0,005	-0,006	0,011	-0,042
15	0,012	-0,009	0,004	-0,018	0,009	123	-0,010	-0,008	-0,004	-0,014	0,021
16	0,007	0,030	0,011	-0,010	0,005	124	0,018	0,016	0,009	0,002	0,003
17	-0,016	0,007	-0,033	0,014	0,010	125	0,003	0,027	0,024	0,012	0,027
18	0,002	0,001	0,002	-0,013	-0,005	126	-0,028	-0,024	-0,028	-0,003	-0,024
19	0,012	0,025	0,006	-0,019	-0,003	127	-0,005	-0,007	-0,006	0,028	0,007
20	-0,003	-0,014	0,009	0,018	8 E-06	128	-0,012	-0,003	0,012	-0,024	0,028
21	-0,022	-0,001	0,004	-0,001	0,010	129	2,138	0,007	0,024	0,008	0,004
22	-0,002	0,021	0,021	-0,013	-0,005	130	0,008	0,002	0,002	0,026	-0,017
23	-0,012	-0,008	-0,038	0,002	-0,003	131	-0,007	-0,009	-0,040	0,006	-0,005
24	0,010	-0,010	-0,012	-0,010	0,010	132	-0,026	-0,004	0,002	-0,016	8 E-06
25	0,005	-0,014	0,020	0,003	0,025	133	-0,037	-0,003	0,016	-0,007	8 E-06
26	0,010	-0,008	0,008	-0,010	0,004	134	0,015	-0,013	0,024	0,009	0,020
27	-0,014	0,003	-0,019	0,013	0,023	135	-0,015	-0,008	0,032	0,016	0,011
28	-0,008	0,008	0,010	0,016	0,007	136	0,014	-0,007	-0,004	0,029	0,006
29	-0,014	0,002	-0,022	-0,002	-0,004	137	-0,003	0,003	-0,011	0,007	0,026
30	-0,020	0,031	0,005	-0,012	-0,037	138	0,004	-0,022	0,010	0,006	0,007
31	-0,004	0,007	0,016	-0,026	0,004	139	0,012	-0,004	-0,021	0,017	0,016
32	0,004	-0,031	0,004	-0,004	0,005	140	0,017	0,003	-0,021	-0,017	-0,016
33	0,009	-0,011	0,021	-0,013	0,010	141	0,001	0,008	0,004	0,014	0,025
34	0,003	0,043	-0,008	-0,009	-0,005	142	-0,008	0,002	0,002	-0,019	0,009

<sup>111</sup> La información de las tablas que aparecen a continuación está recogida con mayor detalle en los archivos adjuntos a este trabajo.

Residuos modelización independiente											
	A	B	C	E	F		A	B	C	E	F
35	0,010	0,019	0,025	0,022	-0,003	143	-0,002	0,001	0,029	0,002	0,006
36	-0,004	-0,006	-0,023	-0,010	0,000	144	0,020	0,011	-0,015	0,023	0,019
37	-0,002	-0,006	-0,004	0,012	0,010	145	0,013	0,017	-0,001	-0,015	0,014
38	0,000	-0,030	0,004	0,005	-0,005	146	-0,002	-0,019	0,024	-0,028	-0,019
39	0,000	0,026	0,011	0,012	-0,003	147	0,002	0,004	-0,008	0,007	0,015
40	0,020	-0,001	0,017	-0,004	0,010	148	0,014	0,012	0,015	0,005	-0,016
41	-0,007	-0,010	-0,011	-0,002	-0,005	149	0,020	0,007	-0,008	0,022	-0,028
42	0,006	0,006	0,005	0,010	-0,023	150	0,005	0,026	0,005	0,012	0,009
43	-0,004	0,002	0,003	-0,004	-0,011	151	-0,004	0,006	0,017	0,007	0,005
44	-0,012	-0,009	-0,002	-0,022	-0,006	152	-0,008	0,009	0,009	0,025	0,020
45	0,004	-0,014	0,011	-0,012	-0,016	153	0,018	0,010	-0,015	0,006	0,011
46	-0,018	-0,018	-0,043	0,004	-0,011	154	-0,007	0,000	-0,015	0,016	0,006
47	-0,012	0,017	-0,014	0,011	0,021	155	0,026	0,015	-0,024	-0,018	-0,014
48	-0,008	0,004	0,018	0,005	0,038	156	0,009	0,011	0,008	0,014	-0,005
49	0,002	-0,009	0,016	0,011	0,016	157	-0,004	0,100	0,006	-0,019	-0,010
50	-0,002	-0,934	0,004	-0,004	-0,021	158	0,012	-8,173	0,009	0,002	0,025
51	0,006	0,006	0,031	-0,002	-0,008	159	0,020	0,015	0,024	-0,007	-0,006
52	-0,018	0,009	-0,003	0,010	-0,030	160	-0,015	0,001	-0,018	-0,002	-0,005
53	0,008	0,002	0,017	-0,004	-0,006	161	0,004	0,005	-0,021	-0,020	0,010
54	-0,006	0,011	-0,026	-0,002	-0,013	162	-0,004	-0,014	0,014	0,009	-0,005
55	0,024	-0,003	0,016	0,010	0,009	163	0,028	0,005	-0,002	0,015	-0,003
56	0,015	-0,010	0,005	-0,004	-0,008	164	-0,021	0,002	-0,014	0,018	0,010
57	-0,021	0,006	0,010	-0,002	-0,018	165	0,008	0,001	-0,016	0,019	0,005
58	-0,001	-0,008	0,019	0,010	-0,021	166	-0,002	0,001	0,012	-0,048	-0,017
59	-0,008	-0,024	-0,019	-0,004	0,026	167	0,018	-0,009	0,016	0,005	-0,018
60	0,014	-0,004	0,011	-0,002	-0,020	168	0,003	0,026	-0,006	-0,005	0,012
61	-0,011	0,013	-0,008	0,010	0,014	169	-0,008	0,023	0,006	0,007	-0,005
62	0,002	0,013	0,015	-0,004	0,018	170	0,018	0,005	-0,006	0,013	0,005
63	-0,008	-0,033	0,022	-0,012	-0,005	171	0,013	0,009	-0,014	0,017	-0,017
64	-0,006	-0,005	-0,009	-0,016	-0,003	172	-0,012	8,173	0,014	0,019	-0,011
65	0,026	-0,007	0,007	-0,018	0,040	173	-0,004	0,005	-0,002	0,002	0,014
66	0,005	0,013	0,019	-0,021	0,012	174	0,020	-0,014	-0,044	0,013	-0,005
67	-0,008	-0,027	-0,019	0,027	0,006	175	-0,017	-0,005	-0,013	-0,010	-0,025
68	-0,012	-0,034	0,021	-0,017	0,019	176	0,000	-0,003	-0,004	-0,043	0,016
69	-0,006	-0,012	0,007	0,017	-0,016	177	0,002	-0,023	0,023	0,009	-0,002
70	-0,004	0,148	0,022	0,018	0,015	178	0,010	0,006	-0,031	0,007	-0,025
71	-0,024	0,010	-0,004	-0,001	-0,016	179	0,016	-0,021	-0,003	0,003	-0,024
72	0,004	-0,008	-0,001	-0,002	0,002	180	-0,009	-0,004	0,031	0,010	-0,004
73	0,010	0,036	-0,005	0,000	0,025	181	0,006	0,003	-0,009	-0,004	-0,006
74	0,003	-0,012	-0,020	0,010	-0,016	182	-0,004	-0,012	-0,020	0,008	0,001
75	0,000	0,039	0,002	-0,004	-0,028	183	0,008	0,002	0,012	-0,005	-0,003
76	-0,010	0,012	0,004	-0,002	0,009	184	-0,014	-0,022	-0,024	-0,012	-0,016
77	0,004	0,017	-0,009	-0,030	0,005	185	0,002	-0,004	-0,007	0,004	-0,011

Residuos modelización independiente											
	A	B	C	E	F		A	B	C	E	F
78	-0,038	0,029	0,006	0,014	0,020	186	0,012	0,003	-0,012	-0,017	-0,009
79	-0,015	0,007	0,024	-0,002	-0,039	187	-0,003	-0,002	-0,001	-0,040	0,001
80	0,000	-0,011	0,032	-0,013	-0,032	188	0,008	-0,003	-0,002	0,027	-0,003
81	-0,006	0,000	0,006	0,012	0,026	189	0,006	0,007	-0,015	0,014	0,014
82	0,002	0,009	0,006	0,016	0,020	190	-0,006	-0,018	-0,001	-0,025	0,005
83	0,008	0,016	0,012	0,028	0,014	191	-0,002	-0,009	-0,012	-0,006	-0,030
84	-0,007	0,027	0,011	0,005	0,018	192	0,000	-0,017	-0,001	0,016	-0,016
85	-0,006	0,016	-0,003	0,024	-0,005	193	0,010	0,007	-0,012	-0,022	0,001
86	-0,004	-0,006	-0,008	0,005	-0,003	194	0,006	-0,001	0,009	0,015	0,007
87	-0,014	0,024	0,010	-0,004	0,000	195	-0,006	0,017	-0,026	-0,022	-0,010
88	-0,010	-0,004	0,029	0,021	0,030	196	-0,022	-0,013	0,001	-0,024	-0,008
89	0,012	0,024	0,016	0,025	0,016	197	-0,022	-0,025	-0,009	0,005	-0,016
90	0,005	0,006	-0,010	0,027	0,019	198	0,016	0,016	-0,001	0,011	-0,001
91	-0,010	0,019	-0,001	0,009	0,004	199	-0,003	0,014	0,008	-0,017	0,007
92	-0,006	-0,005	0,005	0,000	0,006	200	0,024	-0,033	-0,010	0,008	-0,020
93	0,016	-0,016	-0,005	-0,034	-0,001	201	-0,005	-0,025	-0,018	-0,007	-0,004
94	0,009	0,005	0,020	0,016	-0,037	202	0,006	0,013	-0,001	0,004	-0,023
95	0,004	-0,008	0,004	0,014	0,004	203	-0,004	0,010	-0,012	-0,010	0,013
96	0,004	-0,024	-0,018	0,020	0,025	204	-0,002	0,012	-0,021	0,003	-0,005
97	-0,016	-0,014	-0,025	0,003	0,001	205	0,010	-0,033	-0,003	-0,010	0,012
98	-0,008	-0,002	0,000	0,005	0,001	206	-0,004	-0,015	-0,014	-0,007	-0,025
99	-0,014	-0,017	-0,008	-0,003	0,028	207	0,008	0,008	0,007	-0,015	0,024
100	0,000	0,017	-0,016	-0,038	0,007	208	0,006	-0,001	-0,009	-0,020	-0,037
101	-0,012	-0,016	0,002	0,002	0,006	209	0,014	0,007	-0,001	0,007	-0,014
102	0,000	0,011	-0,020	0,023	0,019	210	-0,020	0,002	-0,012	-0,009	0,004
103	-0,002	0,003	-0,004	0,023	-0,016	211	-0,010	-0,009	-0,011	0,002	-0,013
104	-0,014	-0,019	0,018	0,012	0,015	212	0,006	-0,006	-0,007	-0,012	-0,011
105	0,010	-0,009	-0,024	-0,022	-0,016	213	0,002	-0,008	0,003	0,011	0,001
106	-0,015	-0,007	-0,007	-0,009	0,002	214	-0,010	-0,014	-0,022	-0,016	0,017
107	0,008	0,003	-0,012	-0,032	0,025						
108	0,014	0,008	0,019	-0,006	-0,016						

**C.3- Residuos VAR (1):** A continuación aparecen recogidos los residuos obtenidos de la modelización de la información con un modelo VAR(1).

Residuos modelización VAR (1)											
	Res A	Res B	Res C	Res E	Res F		Res A	Res B	Res C	Res E	Res F
1	-0,003	0,001	-0,006	-0,011	-0,016	109	0,010	0,011	0,014	0,001	-0,012
2	0,016	0,010	0,005	-0,010	0,006	110	-0,024	-0,018	-0,011	-0,018	0,014
3	0,001	0,015	0,034	-0,016	-0,017	111	0,000	-0,003	0,001	-0,020	0,016
4	0,007	-0,010	-0,017	-0,024	-0,007	112	-0,024	-0,004	-0,016	0,023	0,022
5	0,016	-0,018	0,014	-0,023	0,016	113	0,004	-0,014	0,009	-0,017	-0,049
6	-0,018	0,011	0,028	0,020	-0,015	114	0,016	0,018	-0,005	-0,016	0,017
7	-0,014	-0,010	-0,017	-0,034	-0,022	115	-0,004	-0,007	-0,002	-0,022	-0,005
8	0,010	-0,010	-0,009	-0,001	0,018	116	-0,009	-0,001	-0,012	0,025	0,010
9	-0,009	0,013	0,009	-0,007	-0,008	117	0,005	-0,002	-0,006	-0,026	0,010
10	-0,015	0,024	0,030	0,002	-0,023	118	0,001	-0,011	0,003	-0,001	0,018
11	0,020	-0,027	-0,010	0,002	-0,005	119	0,011	-0,007	-0,003	-0,008	0,021
12	-0,004	0,039	0,011	0,000	-0,020	120	0,016	0,012	0,008	0,001	0,006
13	0,000	-0,004	0,016	0,009	-0,013	121	0,022	0,010	-0,007	0,003	0,022
14	-0,009	0,004	-0,019	-0,018	0,015	122	0,016	-0,016	0,009	-0,002	-0,003
15	0,005	0,019	0,005	0,007	-0,019	123	-0,003	0,002	-0,003	0,008	-0,033
16	0,010	-0,009	0,002	-0,020	0,012	124	-0,005	-0,011	0,004	-0,012	0,027
17	0,006	0,032	0,013	-0,010	0,003	125	0,021	0,017	0,008	0,007	-0,005
18	-0,014	0,007	-0,037	0,008	0,014	126	0,001	0,024	0,024	0,009	0,032
19	0,004	0,005	0,007	-0,016	-0,004	127	-0,024	-0,026	-0,035	-0,013	-0,027
20	0,010	0,029	-0,004	-0,018	0,003	128	-0,001	-0,001	0,004	0,035	0,014
21	-0,004	-0,011	0,006	0,017	0,006	129	-0,015	-0,005	0,008	-0,025	0,020
22	-0,019	0,001	0,002	-0,010	0,010	130	0,000	0,010	0,016	0,014	0,002
23	-0,001	0,024	0,017	-0,015	-0,007	131	0,006	0,001	-0,004	0,020	-0,015
24	-0,014	-0,007	-0,046	-0,003	0,001	132	-0,010	-0,012	-0,033	0,001	-0,004
25	0,009	-0,004	-0,002	-0,009	0,011	133	-0,026	-0,003	0,012	-0,006	-0,002
26	0,000	-0,011	0,014	0,004	0,027	134	-0,036	0,000	0,004	0,003	-0,003
27	0,011	-0,008	0,000	-0,016	0,003	135	0,014	-0,008	0,015	0,012	0,015
28	-0,014	0,001	-0,018	0,010	0,031	136	-0,024	-0,010	0,028	0,010	0,004
29	-0,005	0,009	0,010	0,011	0,007	137	0,016	-0,009	-0,008	0,022	0,000
30	-0,015	0,002	-0,032	-0,008	0,001	138	-0,009	-0,003	0,001	0,003	0,022
31	-0,021	0,035	0,006	-0,006	-0,032	139	0,005	-0,025	0,012	0,009	0,002
32	-0,006	0,012	0,002	-0,022	0,011	140	0,011	-0,008	-0,020	0,019	0,017
33	0,000	-0,024	-0,005	-0,004	0,002	141	0,016	-0,003	-0,010	-0,013	-0,017
34	0,006	-0,007	0,021	-0,018	0,010	142	0,001	0,004	0,009	0,027	0,036
35	0,002	0,042	-0,012	-0,017	-0,005	143	-0,005	-0,001	-0,002	-0,018	0,005
36	0,011	0,019	0,028	0,015	0,005	144	0,000	0,002	0,025	0,009	0,014
37	-0,004	-0,006	-0,029	-0,027	0,000	145	0,021	0,010	-0,024	0,019	0,021
38	0,000	-0,002	0,007	0,012	0,013	146	0,011	0,013	0,008	-0,019	0,017
39	0,001	-0,029	0,001	-0,001	-0,006	147	0,001	-0,020	0,019	-0,025	-0,010



Residuos modelización VAR (1)											
	Res A	Res B	Res C	Res E	Res F		Res A	Res B	Res C	Res E	Res F
40	0,001	0,025	0,015	0,011	-0,002	148	0,007	0,005	-0,011	0,007	0,026
41	0,021	-0,005	0,015	-0,008	0,009	149	0,016	0,010	0,021	-0,003	-0,016
42	-0,008	-0,012	-0,009	-0,005	-0,005	150	0,022	0,003	-0,009	0,015	-0,019
43	0,011	0,006	0,013	0,010	-0,021	151	0,006	0,021	0,019	0,009	0,012
44	-0,004	-0,002	0,000	-0,006	-0,010	152	0,001	0,002	0,017	0,005	0,000
45	-0,010	-0,009	0,004	-0,019	-0,009	153	-0,004	0,008	0,010	0,024	0,018
46	0,006	-0,012	0,012	-0,007	-0,018	154	0,020	0,008	-0,013	0,002	0,004
47	-0,019	-0,019	-0,041	0,002	-0,013	155	-0,009	-0,003	-0,007	0,020	0,008
48	-0,011	0,020	0,000	0,016	0,017	156	0,030	0,014	-0,022	-0,013	-0,015
49	-0,011	0,005	0,008	0,005	0,030	157	0,006	0,009	0,015	0,028	0,004
50	-0,001	-0,006	0,002	0,010	0,012	158	0,000	0,007	0,002	-0,017	-0,010
51	-0,005	-0,023	-0,001	-0,007	-0,020	159	0,015	0,001	0,009	0,011	0,028
52	0,006	0,007	0,033	0,001	-0,003	160	0,021	0,013	0,023	-0,008	-0,010
53	-0,019	0,004	-0,007	0,005	-0,033	161	-0,013	-0,003	-0,018	-0,005	0,002
54	0,010	0,002	0,026	-0,005	-0,007	162	0,010	0,007	-0,013	-0,019	0,011
55	-0,009	0,009	-0,026	-0,004	-0,021	163	-0,004	-0,012	0,014	0,013	-0,001
56	0,025	-0,002	0,029	0,014	0,007	164	0,031	0,006	-0,007	0,010	-0,001
57	0,012	-0,013	0,004	-0,009	-0,015	165	-0,024	-0,003	-0,006	0,015	0,012
58	-0,018	0,003	0,022	-0,001	-0,018	166	0,014	0,002	-0,017	0,022	0,002
59	0,006	-0,009	0,020	0,009	-0,025	167	-0,005	-0,001	0,014	-0,043	-0,017
60	-0,009	-0,027	-0,012	-0,008	0,019	168	0,021	-0,006	0,008	0,019	-0,011
61	0,016	-0,003	0,023	0,001	-0,033	169	0,002	0,023	-0,002	-0,009	0,013
62	-0,013	0,008	-0,005	0,009	0,016	170	-0,005	0,022	0,008	0,006	-0,007
63	0,005	0,012	0,021	-0,006	0,008	171	0,020	0,007	-0,010	0,009	0,007
64	-0,009	-0,035	0,017	-0,015	-0,007	172	0,011	0,009	-0,010	0,015	-0,018
65	-0,004	-0,004	-0,007	-0,019	-0,003	173	-0,010	-0,002	0,020	0,022	-0,007
66	0,026	-0,007	0,015	-0,020	0,040	174	0,000	0,004	-0,005	0,004	0,008
67	0,003	0,010	0,018	-0,030	0,011	175	0,020	-0,015	-0,042	0,020	-0,011
68	-0,003	-0,028	-0,021	0,014	0,017	176	-0,020	-0,006	0,001	0,002	-0,024
69	-0,009	-0,034	0,032	-0,031	0,022	177	0,004	-0,002	-0,009	-0,026	0,017
70	-0,003	-0,013	0,000	0,011	-0,014	178	0,000	-0,020	0,017	0,024	-0,005
71	-0,004	0,010	0,030	0,007	0,020	179	0,011	0,006	-0,038	0,003	-0,025
72	-0,024	0,005	-0,007	-0,014	-0,022	180	0,015	-0,023	0,010	0,011	-0,020
73	0,005	-0,006	0,004	-0,003	0,006	181	-0,009	-0,006	0,032	0,018	-0,005
74	0,006	0,036	-0,003	-0,004	0,022	182	0,011	-0,001	-0,013	-0,003	-0,015
75	0,000	-0,013	-0,020	0,005	-0,016	183	-0,005	-0,015	-0,010	0,015	-0,002
76	0,000	0,041	0,009	-0,004	-0,021	184	0,010	0,001	0,016	0,001	-0,009
77	-0,010	0,012	0,000	0,000	0,013	185	-0,014	-0,025	-0,027	-0,007	-0,018
78	0,005	-0,012	-0,013	-0,031	0,000	186	0,005	-0,001	0,002	0,016	-0,012
79	-0,039	0,034	0,007	0,018	0,024	187	0,010	0,002	-0,014	-0,012	-0,012
80	-0,011	0,012	0,011	-0,012	-0,044	188	-0,005	-0,002	0,003	-0,030	0,002
81	-0,005	-0,006	0,025	-0,016	-0,025	189	0,011	0,001	-0,008	0,034	-0,002
82	-0,009	0,002	0,006	0,008	0,020	190	0,005	0,006	-0,014	0,006	0,013

Residuos modelización VAR (1)											
	Res A	Res B	Res C	Res E	Res F		Res A	Res B	Res C	Res E	Res F
83	0,001	-0,008	-0,001	0,005	-0,034	191	-0,005	-0,018	0,000	-0,024	0,003
84	0,006	0,015	0,022	0,024	0,013	192	0,000	-0,005	-0,018	0,002	-0,026
85	-0,009	0,022	0,013	-0,003	0,005	193	0,000	-0,016	0,002	0,021	-0,010
86	-0,005	0,015	-0,002	0,022	-0,010	194	0,010	0,007	-0,013	-0,022	-0,003
87	-0,005	-0,006	-0,004	0,003	-0,006	195	0,005	-0,001	0,011	0,025	0,008
88	-0,015	0,025	0,014	0,001	-0,005	196	-0,004	0,016	-0,032	-0,026	-0,013
89	-0,010	-0,004	0,024	0,025	0,026	197	-0,021	-0,009	0,004	-0,014	-0,002
90	0,010	0,024	0,011	0,019	0,004	198	-0,020	-0,017	-0,021	0,010	-0,015
91	0,001	0,001	-0,007	0,022	0,016	199	0,014	0,022	-0,002	0,012	-0,003
92	-0,010	0,016	0,006	0,009	0,000	200	-0,010	0,013	0,003	-0,018	0,004
93	-0,005	-0,007	0,004	0,006	0,006	201	0,025	-0,029	-0,018	0,011	-0,020
94	0,015	-0,016	-0,005	-0,028	-0,003	202	-0,009	-0,025	-0,010	-0,007	0,000
95	0,006	0,004	0,026	0,027	-0,032	203	0,010	0,014	0,003	0,011	-0,026
96	0,006	-0,015	0,008	0,009	0,007	204	-0,005	0,007	-0,013	-0,007	0,016
97	0,006	-0,029	-0,007	0,020	0,016	205	0,000	0,015	-0,022	0,008	-0,010
98	-0,014	-0,019	-0,014	0,007	-0,007	206	0,009	-0,030	-0,005	-0,005	0,016
99	-0,005	-0,005	0,007	0,017	0,010	207	-0,004	-0,012	-0,019	-0,002	-0,026
100	-0,015	-0,020	-0,012	0,004	0,024	208	0,010	0,009	0,009	-0,007	0,031
101	-0,001	0,018	-0,019	-0,029	0,003	209	0,006	-0,001	-0,019	-0,019	-0,040
102	-0,015	-0,014	-0,004	0,014	0,016	210	0,016	0,010	0,003	0,012	0,000
103	-0,001	0,015	-0,030	0,022	0,021	211	-0,019	0,002	-0,013	-0,013	0,003
104	-0,006	0,004	-0,007	0,023	-0,014	212	-0,006	-0,003	-0,013	0,005	-0,014
105	-0,016	-0,018	0,010	0,018	0,022	213	0,005	0,010	-0,011	-0,010	-0,010
106	0,009	-0,008	-0,035	-0,016	-0,023	214	0,000	-0,005	-0,001	0,015	0,003
107	-0,020	-0,007	0,000	0,007	0,011	215	-0,010	-0,012	-0,026	-0,018	0,014
108	0,009	0,005	-0,021	-0,025	0,023						

## C.4- Matrices estimadas del modelo

**Matriz dinámica ( $\hat{F}$ ):**

$$\begin{pmatrix} 0,95193 & 0,00986 & 0,08984 & 0,02033 \\ -0,00513 & 0,82200 & 0,00533 & -0,05839 \\ -0,01837 & -0,00963 & 0,83530 & 0,11351 \\ 0,03317 & 0,03865 & -0,03655 & 0,78178 \end{pmatrix}$$

**Matriz de distribución ( $\hat{H}$ ):**

$$\begin{pmatrix} 0,05194 & 0,39507 & 0,36405 & -0,28381 \\ -0,33457 & 0,50426 & -0,02267 & -0,06499 \\ -0,65052 & 0,02920 & -0,36644 & -0,09902 \\ -0,66617 & 0,09696 & 0,34067 & 0,35035 \\ -0,51398 & -0,42573 & 0,32307 & -0,28899 \end{pmatrix}$$

**Matriz de innovación ( $\hat{G}$ ):**

$$\begin{pmatrix} 0,05364 & -0,07727 & -0,29030 & -0,14141 & -0,19539 \\ 0,33302 & 0,31328 & 0,06314 & 0,03188 & -0,29412 \\ 0,31426 & -0,08696 & -0,22904 & 0,32636 & 0,27120 \\ -0,20448 & -0,07230 & 0,02122 & 0,52700 & -0,28310 \end{pmatrix}$$

### C.5- Innovaciones estimadas del modelo

Innovaciones modelo											
	A	B	C	E	F		A	B	C	E	F
1	2,148	-0,409	1,120	0,537	0,472	109	0,467	0,563	-0,815	-1,249	1,069
2	0,103	-0,385	0,006	-0,486	-0,930	110	0,692	1,052	0,578	-0,228	-0,585
3	0,971	0,274	0,104	-0,573	0,012	111	-1,663	-0,648	-0,114	-0,678	0,431
4	0,032	0,708	1,462	-0,856	-0,870	112	-0,353	-0,249	0,096	-0,883	0,794
5	0,249	-0,742	-0,410	-1,127	-0,454	113	-1,709	-0,219	-0,565	1,189	1,031
6	1,068	-1,636	0,190	-1,187	0,573	114	0,149	-0,533	0,272	-0,385	-2,091
7	-1,092	-0,243	1,183	0,950	-0,789	115	1,533	0,890	-0,148	-0,632	0,195
8	-1,116	-0,830	-0,529	-1,100	-0,973	116	0,093	-0,170	-0,092	-1,086	-0,289
9	0,699	-1,026	-0,909	-0,139	0,644	117	-0,614	-0,189	-0,600	1,185	0,330
10	-0,284	0,333	-0,066	-0,286	-0,305	118	0,309	-0,041	-0,469	-0,848	0,688
11	-0,967	1,391	1,204	0,183	-1,124	119	0,086	-0,579	0,026	-0,125	0,902
12	1,409	-1,309	-0,216	0,364	-0,193	120	0,796	-0,497	-0,017	-0,252	1,045
13	0,335	1,603	0,217	0,042	-0,941	121	1,256	0,599	0,457	0,144	0,258
14	0,086	0,036	0,567	0,433	-0,564	122	1,589	0,714	-0,090	0,388	0,899
15	-0,546	0,000	-0,817	-0,805	0,837	123	1,107	-0,774	0,440	0,084	-0,117
16	0,182	0,966	-0,251	-0,006	-0,643	124	-0,297	-0,254	0,045	0,545	-1,808
17	0,727	-0,370	-0,201	-0,971	0,562	125	-0,558	-0,816	0,108	-0,372	0,959
18	0,496	1,473	0,353	-0,692	0,190	126	1,176	0,736	0,459	0,233	0,003
19	-1,140	0,562	-1,690	0,346	0,724	127	0,132	1,501	1,296	0,516	1,534
20	-0,168	0,399	-0,541	-0,702	0,076	128	-2,018	-1,099	-1,024	-0,482	-0,824
21	0,547	1,612	-0,521	-0,924	0,125	129	-0,501	-0,401	-0,419	1,529	0,443
22	-0,490	-0,396	-0,125	0,761	0,297	130	-1,048	-0,209	0,227	-0,994	1,150
23	-1,539	-0,181	-0,101	-0,165	0,643	131	-0,168	0,624	0,854	0,355	0,169
24	-0,325	1,329	0,604	-0,663	-0,118	132	0,477	0,310	0,112	1,041	-0,741
25	-1,072	-0,147	-2,018	-0,133	0,029	133	-0,429	-0,558	-1,545	0,191	-0,390
26	0,503	-0,277	-1,140	-0,449	0,500	134	-1,814	-0,200	-0,143	-0,496	-0,269
27	0,195	-0,748	0,088	0,142	1,242	135	-2,737	0,118	0,147	-0,089	-0,201
28	0,864	-0,639	0,080	-0,626	0,263	136	0,755	-0,167	0,684	0,509	0,756
29	-0,769	-0,159	-0,767	0,484	1,196	137	-1,123	-0,458	1,539	0,517	0,282
30	-0,583	0,648	0,194	0,725	0,441	138	1,286	-0,508	0,198	1,108	0,017
31	-1,178	0,481	-1,342	-0,120	0,045	139	0,009	-0,223	0,051	0,146	0,836
32	-1,728	2,384	-0,293	-0,343	-1,626	140	0,503	-1,337	0,550	0,162	0,007
33	-0,771	1,446	-0,177	-1,004	0,312	141	1,091	-0,739	-0,688	0,702	0,419
34	-0,134	-0,984	-0,449	-0,296	0,238	142	1,350	-0,167	-0,668	-0,801	-1,076
35	0,609	-0,753	0,611	-0,814	0,457	143	0,176	0,211	0,152	0,899	1,010
36	0,437	2,038	-0,402	-0,800	-0,311	144	-0,552	0,180	0,120	-0,830	0,348
37	0,718	1,527	0,830	0,781	0,093	145	-0,372	0,270	1,261	0,187	0,448
38	-0,214	-0,166	-1,222	-0,895	0,184	146	1,257	0,676	-0,528	0,994	0,929
39	-0,160	-0,405	-0,512	0,435	0,570	147	0,754	1,006	0,181	-0,843	0,809
40	-0,031	-1,901	-0,354	0,130	-0,154	148	-0,241	-0,939	0,916	-1,428	-0,605

Innovaciones modelo											
	A	B	C	E	F		A	B	C	E	F
41	0,212	0,795	0,390	0,587	-0,254	149	0,190	-0,243	-0,274	0,189	0,728
42	1,500	-0,086	0,734	-0,225	0,403	150	0,948	0,422	0,689	0,026	-0,804
43	-0,333	-0,921	-0,187	-0,320	-0,286	151	1,530	0,028	-0,311	0,907	-1,217
44	0,641	-0,057	0,362	0,401	-1,157	152	0,567	0,928	0,525	0,629	0,311
45	-0,125	-0,276	-0,012	-0,204	-0,692	153	-0,191	0,190	0,858	0,307	0,243
46	-0,693	-0,749	0,045	-0,997	-0,513	154	-0,614	0,269	0,629	1,125	1,041
47	0,321	-1,031	0,439	-0,540	-0,955	155	1,093	0,441	-0,451	0,131	0,561
48	-1,026	-1,575	-1,773	0,090	-0,793	156	-0,724	-0,166	-0,633	0,682	0,375
49	-0,670	0,777	-0,764	0,772	0,716	157	1,682	0,784	-1,343	-0,752	-0,659
50	-0,750	0,803	0,202	0,385	1,807	158	0,327	0,609	0,062	0,889	-0,179
51	-0,105	0,224	0,370	0,493	1,060	159	-0,308	0,542	0,103	-0,739	-0,418
52	-0,242	-1,031	0,224	-0,313	-0,756	160	0,613	0,058	0,413	0,266	1,264
53	0,582	0,178	1,595	-0,042	-0,489	161	1,253	0,692	1,230	-0,424	-0,184
54	-0,994	0,279	0,337	0,290	-1,719	162	-1,054	-0,265	-0,391	-0,328	0,016
55	0,730	0,166	1,117	-0,168	-0,579	163	0,184	0,164	-0,858	-0,995	0,534
56	-0,236	0,404	-0,845	-0,274	-1,031	164	-0,590	-0,790	0,172	0,414	-0,054
57	1,800	-0,125	0,741	0,467	0,218	165	1,966	0,025	-0,316	0,708	-0,025
58	1,262	-0,998	0,389	-0,438	-0,576	166	-1,402	-0,256	-0,401	0,855	0,516
59	-1,043	-0,409	1,016	-0,233	-1,034	167	0,563	0,172	-0,850	1,142	0,346
60	0,228	-0,838	1,155	0,388	-1,257	168	-0,379	0,190	0,410	-2,034	-0,665
61	-0,311	-2,041	-0,262	-0,314	0,812	169	1,165	-0,360	0,563	0,442	-0,795
62	1,272	-0,840	0,872	-0,204	-1,376	170	0,309	1,111	0,180	-0,253	0,456
63	-0,410	0,035	0,056	0,351	0,380	171	-0,536	1,508	0,453	0,249	-0,101
64	0,354	0,710	0,926	-0,309	0,568	172	1,043	0,737	-0,322	0,567	0,547
65	-0,575	-1,839	1,078	-0,849	-0,182	173	0,699	0,604	-0,601	0,741	-0,596
66	-0,145	-0,944	-0,029	-1,043	-0,367	174	-0,836	-0,036	0,580	1,098	-0,293
67	2,009	-0,804	0,457	-1,125	1,562	175	-0,329	0,164	-0,003	0,293	0,657
68	0,622	0,161	0,936	-1,558	0,405	176	1,169	-0,763	-1,804	0,752	-0,214
69	-0,213	-1,848	-0,790	0,687	0,463	177	-1,312	-0,483	-0,537	-0,112	-1,153
70	-0,594	-2,580	0,901	-1,126	0,818	178	-0,075	-0,075	-0,441	-1,494	0,688
71	-0,111	-1,580	0,225	0,546	-1,008	179	-0,178	-0,995	0,877	0,691	-0,113
72	0,115	0,119	1,241	0,741	0,406	180	0,815	0,209	-1,067	0,389	-1,104
73	-1,371	0,317	0,034	-0,375	-1,111	181	1,191	-1,078	0,255	0,509	-1,070
74	0,339	-0,303	-0,126	-0,158	-0,109	182	-0,348	-0,568	1,840	0,946	-0,328
75	0,786	1,892	-0,439	-0,222	0,798	183	0,753	-0,043	0,522	0,048	-0,419
76	0,126	-0,282	-1,330	0,141	-0,741	184	-0,158	-0,756	0,063	0,598	0,049
77	0,059	2,143	-0,411	-0,217	-1,309	185	0,694	0,055	1,046	0,026	-0,180
78	-0,856	1,119	-0,443	-0,045	0,409	186	-0,876	-1,312	-0,490	-0,447	-0,709
79	-0,002	-0,501	-0,978	-1,535	0,268	187	0,228	-0,259	0,115	0,543	-0,617
80	-2,850	1,563	-0,318	0,543	1,018	188	0,881	0,247	-0,259	-0,531	-0,491
81	-1,441	1,233	0,145	-0,315	-1,596	189	-0,187	0,089	0,311	-1,635	0,116
82	-0,431	-0,115	0,776	-0,694	-1,392	190	0,571	0,142	0,024	1,419	0,020
83	-0,301	-0,240	0,135	0,342	0,771	191	0,482	0,546	-0,337	0,737	0,950

Innovaciones modelo											
	A	B	C	E	F		A	B	C	E	F
84	0,352	-0,705	-0,313	0,316	-1,296	192	-0,441	-0,646	0,184	-1,038	0,589
85	0,908	0,427	0,483	1,133	0,359	193	-0,209	-0,366	-0,448	-0,079	-1,104
86	-0,226	1,292	0,564	-0,053	0,461	194	-0,034	-0,892	0,115	1,105	-0,600
87	-0,383	1,106	-0,128	0,819	-0,271	195	0,866	0,324	-0,223	-0,736	-0,010
88	-0,427	-0,142	-0,530	0,067	-0,193	196	0,485	0,167	0,720	1,034	0,441
89	-1,086	1,256	0,144	-0,258	-0,279	197	-0,272	1,125	-0,775	-0,964	-0,237
90	-0,954	0,076	0,828	0,898	1,234	198	-1,748	-0,048	0,094	-0,877	-0,005
91	0,665	1,372	0,581	0,846	0,546	199	-1,835	-0,879	-0,711	0,459	-0,498
92	0,191	0,387	-0,382	0,894	0,818	200	0,901	1,284	-0,203	0,834	0,038
93	-0,742	1,022	-0,147	0,185	0,024	201	-0,367	1,369	0,308	-0,640	0,494
94	-0,687	-0,108	-0,176	-0,101	0,151	202	1,625	-1,137	-0,499	0,434	-0,633
95	0,862	-1,019	-0,560	-1,740	-0,369	203	-0,166	-1,758	-0,471	-0,203	-0,070
96	0,566	-0,274	0,658	0,665	-2,120	204	0,779	0,412	0,210	0,491	-1,188
97	0,630	-1,147	0,300	0,564	-0,253	205	-0,128	0,622	-0,201	-0,128	0,727
98	0,623	-2,160	-0,374	0,878	0,605	206	-0,188	1,221	-0,748	0,375	-0,057
99	-0,783	-1,691	-0,778	0,200	-0,356	207	0,434	-1,170	-0,252	-0,158	1,030
100	-0,438	-0,568	0,034	0,559	0,174	208	-0,297	-0,861	-0,565	-0,109	-0,948
101	-1,049	-1,007	-0,355	0,076	1,046	209	0,646	0,487	0,506	-0,292	1,328
102	-0,132	1,131	-0,748	-1,655	0,137	210	0,370	0,294	-0,203	-0,868	-1,514
103	-1,202	-0,208	-0,355	0,212	0,408	211	1,044	0,653	0,240	0,603	-0,279
104	-0,200	1,093	-1,326	1,181	0,919	212	-1,292	0,305	-0,235	-0,261	0,365
105	-0,489	0,961	-0,635	1,275	-0,534	213	-0,828	0,016	-0,454	0,326	-0,262
106	-1,212	-0,394	0,380	1,022	0,917	214	0,171	0,760	-0,450	-0,258	-0,208
107	0,529	-0,186	-1,133	-0,737	-0,867	215	-0,005	0,058	0,013	0,782	0,337
108	-1,251	-0,221	-0,292	-0,028	0,070	216	-0,677	-0,509	-0,896	-0,607	1,045

## C.6- Estados estimados del modelo

Estados del modelo									
	E1	E2	E3	E4		E1	E2	E3	E4
1	-0,5642	0,1927	0,2543	-0,3707	109	0,6279	-1,4115	0,6840	0,5228
2	-0,5483	0,6460	0,7222	-0,5222	110	0,8420	-1,2643	0,7993	-0,7643
3	-0,2141	0,7416	0,2191	-0,4223	111	0,7798	-0,2334	0,3383	-0,8076
4	-0,1356	1,0341	0,1696	-0,8653	112	0,7596	-1,0592	-0,3657	-0,7220
5	-0,2897	1,4513	-0,8508	-0,8703	113	0,6075	-1,2853	-0,5753	-1,1648
6	0,8003	1,1632	-1,0734	-1,0748	114	0,2100	-1,9335	-0,3323	-0,2311
7	0,1526	0,6621	-0,8307	-1,6384	115	0,5795	-1,0760	-0,9514	0,1666
8	-0,3185	0,5317	-1,3850	-0,2295	116	0,5665	-0,1998	-0,4913	-0,6267
9	0,0766	0,0307	-1,9621	-0,1456	117	0,7351	-0,1111	-0,8577	-0,9600
10	0,1683	-0,3169	-1,0110	-0,3823	118	0,5257	-0,4045	-0,4009	-0,0420
11	0,1365	-0,1583	-1,1669	-0,3004	119	0,6009	-0,5037	-0,2275	-0,7277
12	-0,2976	0,4065	-1,9551	0,3437	120	0,4151	-0,7963	-0,0035	-0,8567
13	-0,2222	0,4191	-0,9204	0,3945	121	0,2870	-0,8140	0,3980	-1,2422
14	-0,2730	1,2236	-1,0492	0,4598	122	0,0932	-0,0324	0,5488	-1,2950
15	-0,4465	1,2299	-0,9489	0,8159	123	-0,0631	0,5464	1,1382	-1,4593
16	0,3232	0,4556	-0,7237	0,1385	124	0,0205	0,7317	1,0914	-1,2471
17	-0,2309	0,9004	-0,7328	0,2082	125	0,3664	1,0534	0,3688	-0,1069
18	-0,1192	0,6425	-0,4512	-0,5802	126	0,2570	0,1439	0,2887	-0,3364
19	-0,2884	1,1311	-0,6737	-1,0351	127	0,1046	0,7957	0,4738	-0,4216
20	-0,1494	0,4757	-0,3967	-0,6164	128	-0,7166	0,8422	0,5369	-0,5833
21	0,0159	0,4157	-0,5752	-0,8510	129	-0,1345	-0,1212	-0,2977	-0,0171
22	0,1125	0,9763	-0,6978	-1,3894	130	-0,3335	-0,4999	0,3453	0,7915
23	-0,0993	0,5211	-0,5141	-0,5765	131	-0,4652	-1,2236	0,0135	-0,0395
24	-0,2887	-0,3099	-0,8224	-0,3584	132	-0,8427	-0,8610	-0,1140	0,0527
25	-0,5376	0,1232	-1,3239	-0,6047	133	-0,8529	-0,1807	0,1703	0,6255
26	-0,0890	-0,4109	-1,0633	-0,3286	134	-0,2678	-0,4743	0,4549	0,7534
27	0,1540	-0,4764	-0,4876	-0,7221	135	-0,1212	-1,0427	-0,2798	0,7425
28	-0,1366	-0,8775	0,0020	-0,8205	136	-0,2823	-1,7104	-1,1248	1,1108
29	-0,0456	-0,6771	0,0953	-1,2133	137	-0,7287	-1,4390	-0,3255	0,7604
30	-0,1746	-1,1769	0,3930	-0,9109	138	-1,3216	-1,1712	-0,5788	1,0145
31	-0,4883	-0,9956	0,3000	-0,4437	139	-1,4156	-1,1509	0,4415	1,0616
32	-0,1592	-1,1317	0,0871	-0,3106	140	-1,4788	-1,3032	0,8110	0,5780
33	0,0132	-0,2909	-1,1848	0,1595	141	-1,3896	-1,3066	0,9858	0,4118
34	-0,1141	-0,1936	-1,5393	-0,4105	142	-1,1047	-1,0983	1,8155	0,2563
35	-0,0624	-0,6032	-1,2140	-0,4103	143	-0,2916	-0,2566	1,6150	-0,3406
36	-0,2435	-0,6328	-1,0784	-0,9173	144	-0,5174	-0,3149	1,8878	-0,2048
37	-0,1969	0,3536	-1,2877	-1,2892	145	-0,3592	-0,4828	1,1731	-0,6918
38	-0,7747	1,1275	-1,0391	-0,8081	146	-0,7763	-0,4338	0,6660	-0,5590
39	-0,3895	0,6894	-0,9716	-1,0699	147	-0,8484	0,0391	1,5445	-0,5603
40	-0,4748	0,2597	-0,5336	-0,6682	148	-0,8086	0,3903	1,2937	-1,4174

Estados del modelo									
	E1	E2	E3	E4		E1	E2	E3	E4
41	-0,2512	-0,3266	-0,2781	-0,2601	149	-0,5647	0,2304	0,0970	-1,6116
42	<b>-0,4695</b>	0,1841	-0,2231	0,0746	150	-0,6196	0,0487	0,3088	-1,4069
43	-0,6367	0,5417	0,1755	-0,4597	151	-0,6185	0,8554	0,0029	-1,0981
44	-0,3855	0,1391	-0,0627	-0,3227	152	-0,3228	1,6559	0,3966	-0,3451
45	-0,2749	0,7061	-0,1426	0,1622	153	-0,6056	1,8261	0,5488	-0,1597
46	-0,0820	0,6399	-0,3693	0,2837	154	-0,8771	1,5049	0,3269	0,0421
47	0,1498	0,1643	-0,9085	0,0739	155	-1,3886	0,8901	0,5684	0,4674
48	0,2964	0,2007	-1,0998	0,1065	156	-1,2253	1,0271	1,1480	-0,0218
49	0,9111	-0,5597	-0,8790	0,6989	157	-1,0656	0,4366	1,2249	0,3397
50	0,6737	-0,7239	-0,3235	<b>0,8555</b>	158	-0,2385	1,2420	1,4209	-0,4361
51	0,0542	-1,1548	0,0853	0,4662	159	-0,2343	1,4397	1,4070	0,0568
52	-0,3499	-1,2139	0,4453	0,2912	160	0,0166	1,3619	0,6499	-0,2044
53	-0,1053	-1,1875	0,0782	0,3305	161	-0,2926	1,0199	1,0289	-0,4686
54	-0,4422	-0,5015	-0,2279	0,2246	162	-0,4329	1,6250	0,6653	-0,8259
55	-0,3198	-0,1318	-0,9345	0,9796	163	-0,2324	0,9160	0,1221	-0,5723
56	-0,5309	0,3618	-0,9175	0,7219	164	0,0706	0,6578	0,1016	-1,1680
57	-0,1283	0,5420	-0,9628	0,7431	165	-0,0094	0,2050	-0,0911	-0,4744
58	-0,4057	0,9554	-0,1043	0,4736	166	0,0754	0,8685	0,7808	-0,3903
59	-0,1702	1,0469	0,0604	0,1522	167	-0,0183	0,0438	0,6905	0,3037
60	-0,2273	0,7381	-0,8206	0,5860	168	0,0858	0,1442	1,4342	0,5714
61	-0,3365	0,8378	-0,9564	1,1082	169	0,4871	0,1823	0,1862	-0,4084
62	-0,2748	-0,3874	-0,4173	0,7329	170	0,4934	0,7309	0,2958	-0,0452
63	-0,1101	-0,2514	-0,4236	0,6653	171	0,3278	0,9228	0,2265	-0,4036
64	-0,2914	-0,0566	-0,2061	0,7015	172	0,0409	1,1415	-0,2211	-0,1074
65	-0,6541	0,1347	-0,1959	0,1168	173	-0,0663	1,3583	0,4623	-0,1602
66	-0,6826	-0,5667	-0,7334	-0,0404	174	0,1655	1,7118	0,7413	0,2680
67	-0,4296	-0,7349	-0,9959	-0,3977	175	-0,0619	1,2625	0,5163	1,1012
68	-0,6229	-0,6333	-0,2090	-1,6950	176	-0,1770	0,7343	0,7022	0,9125
69	-0,7620	-0,2717	-0,7811	-2,4172	177	0,5013	0,6781	1,7205	0,9447
70	-0,6746	-0,8964	-0,2855	-1,5055	178	1,0217	0,2225	0,9320	1,2778
71	-0,8019	-1,8725	-0,7027	-1,7214	179	1,2912	0,2184	0,6854	0,0365
72	-0,7093	-1,6426	-0,7938	-0,7045	180	1,0263	-0,4451	0,5798	0,5607
73	-1,3244	-1,2516	-0,6207	-0,3389	181	1,5341	0,2057	0,8430	0,7699
74	-1,1734	-1,0459	-1,4103	0,0404	182	1,7634	0,5277	1,0443	1,0229
75	-1,1313	-0,8267	-1,0612	-0,0989	183	1,2198	0,3195	0,6897	1,5831
76	-1,2837	-0,0885	-0,5420	-0,7574	184	1,2258	0,5626	0,7531	1,2693
77	-0,7473	0,0674	-0,3007	-0,3681	185	1,2036	0,1055	0,9552	1,4167
78	-0,5018	1,1225	-0,7794	-0,2187	186	1,0223	0,3711	0,8689	1,0574
79	-0,6184	0,8498	-0,8462	-0,1706	187	1,4747	-0,2968	0,4366	1,0716
80	-0,1726	0,3601	-0,8841	-0,9589	188	1,5047	-0,1112	0,5400	1,2944
81	-0,7166	-0,4133	-1,3530	-0,2482	189	1,7806	0,3101	0,5796	0,6934
82	-0,6712	0,0459	-2,2702	0,3100	190	1,8657	0,1074	-0,1127	-0,2641
83	-0,7057	0,2678	-2,7561	0,4459	191	1,5698	0,3688	0,4710	0,4793



Estados del modelo									
	E1	E2	E3	E4		E1	E2	E3	E4
84	-1,1434	-0,1997	-2,0251	0,4803	192	1,3416	0,3237	1,0950	0,3983
85	-0,8898	0,0708	-1,6189	0,9099	193	1,3913	-0,3019	0,6282	-0,2448
86	-1,3282	0,3982	-0,6288	1,0329	194	1,7468	-0,1280	0,2178	0,1507
87	-1,6541	0,4984	-0,5922	0,6083	195	1,6789	-0,1935	0,4063	0,9890
88	-1,7423	0,6962	-0,3932	0,9656	196	1,8449	0,1320	0,4750	0,2161
89	-1,4971	0,3613	-0,2244	0,9148	197	1,3762	0,2513	0,8163	0,5422
90	-1,5291	0,3648	-0,7026	0,7648	198	1,7029	0,4244	0,3310	-0,0336
91	-2,1652	-0,3165	-0,3436	0,9181	199	1,6621	-0,2737	-0,6171	-0,0634
92	-2,5416	0,2499	0,2408	0,7147	200	1,7309	-1,0036	-0,8733	0,8244
93	-2,5757	0,1265	0,9538	0,6397	201	1,4587	-0,1820	-0,1578	0,8422
94	-2,4589	0,1478	0,6939	0,5502	202	1,1688	-0,0469	-0,4411	0,2109
95	-2,2585	-0,2155	0,5276	0,3778	203	1,4588	0,2940	0,3282	0,3651
96	-1,4911	-0,1993	0,3469	-0,7341	204	1,7345	-0,4067	0,4092	0,3968
97	-1,2243	0,6775	-0,0713	0,2247	205	1,8037	0,4024	0,3577	0,7477
98	-1,1549	0,5114	0,3265	0,4931	206	1,6478	0,2014	0,4534	0,3506
99	-0,9889	-0,2436	1,2650	0,6690	207	1,6893	0,4401	0,4994	0,4683
100	-0,4607	-0,9530	1,2008	0,9049	208	1,6749	-0,2175	0,9584	0,0365
101	-0,4243	-1,1853	1,2570	0,9882	209	2,0940	-0,3136	0,5941	0,3624
102	-0,3732	-2,0154	1,3291	0,6905	210	1,6833	-0,2868	0,8116	-0,3675
103	0,8824	-1,5179	0,7434	-0,5806	211	2,1398	0,4017	0,0515	-0,4022
104	0,0690	-1,8115	0,4695	-0,2874	212	1,9425	1,0114	0,2916	-0,0886
105	0,0275	-1,5106	1,1559	-0,0136	213	1,8245	0,3633	-0,1766	0,0201
106	0,1228	-0,9392	1,1577	0,7300	214	1,8160	0,0749	-0,3043	0,5013
107	-0,2421	-1,5490	1,2055	1,0596	215	1,8706	0,3412	-0,2811	0,2898
108	0,5294	-1,0496	1,1126	0,4546	216	1,5799	0,1955	0,0973	0,6259

**C.7- Estadístico  $T^2$  de Hotelling:** La siguiente tabla recoge el valor del estadístico  $T^2$  de Hotelling calculado en las distintas situaciones analizadas en este trabajo junto con el límite de control correspondiente.

Valores estadístico $T^2$ de Hotelling						
	$T_{obs}^2$	$T_R^2$	$T_{res\ indiv}^2$	$T_u^2$	$T_e^2$	$T_x^2$
1	7,129	6,299			8,976	0,764
2	0,879	0,629		1,389	1,999	2,411
3	2,909	2,502	2,277	2,700	2,049	1,252
4	7,223	5,604	7,362	7,427	8,289	2,953
5	3,472	2,891	2,601	3,842	3,666	5,100
6	8,986	7,531	6,035	7,928	8,735	5,263
7	4,719	3,610	9,932	8,262	8,329	6,112
8	5,604	5,153	6,157	7,849	6,198	3,140
9	1,619	1,516	4,310	2,698	4,710	5,696
10	1,675	1,592	1,054	2,103	0,574	1,920
11	9,203	7,890	11,493	9,351	9,728	2,178
12	4,067	3,185	7,546	6,848	5,429	6,370
13	6,086	4,867	7,993	8,680	5,376	2,004
14	4,730	3,298	1,870	2,155	1,636	4,643
15	1,586	1,559	5,331	4,192	4,021	5,613
16	2,737	2,196	1,844	3,349	2,339	1,216
17	1,824	1,527	3,312	3,478	3,549	2,218
18	6,059	5,181	5,129	5,554	4,670	1,339
19	5,375	4,685	7,808	8,352	8,760	4,069
20	1,858	1,710	0,817	1,599	1,791	1,092
21	7,546	6,699	5,577	6,266	6,616	1,832
22	0,066	0,024	3,031	2,211	1,883	5,214
23	2,510	2,386	3,734	3,357	3,911	1,205
24	5,094	4,453	4,620	4,793	4,466	1,251
25	3,696	3,525	6,707	9,062	9,481	2,930
26	1,741	1,559	2,502	1,511	4,192	1,980
27	3,729	2,961	5,636	4,233	3,742	1,690
28	4,251	3,541	1,861	2,327	2,482	2,572
29	5,254	4,039	5,422	6,404	4,666	3,689
30	2,446	1,943	2,276	1,384	2,421	4,255
31	5,034	4,316	3,339	5,608	5,468	2,385
32	10,607	10,165	13,540	13,118	17,054	2,253
33	7,074	6,672	4,541	3,678	5,957	2,343
34	2,253	2,038	5,004	2,661	1,843	3,574
35	6,190	4,922	4,310	4,515	4,024	2,871
36	7,153	6,382	9,709	11,200	8,082	3,530

Valores estadístico $T^2$ de Hotelling						
	$T_{obs}^2$	$T_R^2$	$T_{res\ indiv}^2$	$T_u^2$	$T_e^2$	$T_x^2$
37	5,651	4,538	5,988	5,071	5,837	4,895
38	1,858	1,710	2,471	5,695	4,550	4,492
39	0,277	0,199	1,222	1,279	1,697	3,631
40	2,970	2,686	4,592	4,173	5,050	1,240
41	0,914	0,654	3,704	3,713	1,937	0,402
42	3,781	3,093	4,291	4,437	4,282	0,346
43	0,303	0,253	1,147	1,329	1,501	1,277
44	2,661	1,816	2,902	3,454	3,421	0,316
45	1,158	0,780	0,662	0,587	0,962	0,949
46	2,250	2,011	3,145	2,770	3,511	1,057
47	4,967	3,900	3,089	3,104	3,868	1,373
48	7,188	6,568	10,648	9,495	11,650	2,136
49	3,781	3,502	5,563	4,753	4,491	3,910
50	4,287	3,577	7,391	4,370	7,645	2,919
51	2,572	2,080	3,107	1,011	2,819	2,405
52	3,124	2,851	4,516	4,183	2,662	2,812
53	3,400	2,558	4,581	4,388	6,203	2,348
54	5,751	4,739	6,390	6,664	7,322	0,748
55	4,319	3,068	1,782	3,497	3,798	3,614
56	3,488	2,886	4,525	5,225	3,928	3,007
57	4,164	3,211	5,641	7,632	5,348	3,257
58	4,432	3,476	2,446	3,056	4,408	2,174
59	4,714	3,561	5,004	5,610	6,385	1,789
60	9,217	6,629	4,153	5,472	6,907	2,795
61	3,124	2,851	6,688	5,560	7,192	5,518
62	6,911	5,202	3,483	7,877	7,458	1,694
63	0,807	0,720	3,091	2,769	0,741	1,385
64	1,726	1,299	2,807	2,544	3,608	1,197
65	7,201	5,943	8,837	9,383	9,733	0,552
66	3,121	2,668	1,596	1,616	3,296	1,573
67	13,490	10,822	12,863	13,790	14,158	2,467
68	12,621	9,798	4,795	6,487	8,183	6,258
69	4,801	4,085	8,350	6,887	7,240	11,410
70	18,907	15,327	11,607	18,431	16,232	5,851
71	7,628	6,614	3,671	2,178	5,943	11,916
72	6,148	4,948	4,673	5,083	4,720	6,149
73	5,539	5,218	5,342	6,323	5,005	4,586
74	2,162	1,761	0,429	0,629	0,357	5,503
75	6,013	4,978	9,167	8,552	7,507	3,588
76	0,484	0,391	3,848	3,269	5,306	2,661

Valores estadístico $T^2$ de Hotelling						
	$T_{obs}^2$	$T_R^2$	$T_{res}^2$ <i>indiv</i>	$T_u^2$	$T_e^2$	$T_x^2$
77	7,238	6,248	10,118	9,553	10,285	0,782
78	4,494	4,114	1,786	1,999	3,224	2,905
79	2,352	2,123	5,344	5,030	6,715	2,337
80	13,670	12,788	15,989	19,217	15,997	2,591
81	10,479	9,587	10,145	9,588	9,731	3,115
82	12,727	10,335	9,642	6,659	5,870	8,135
83	4,453	3,860	3,404	2,274	1,573	12,248
84	5,785	4,363	3,307	4,856	4,322	7,711
85	4,060	3,133	5,335	4,728	4,109	6,664
86	5,611	4,845	5,289	3,500	3,454	5,230
87	7,457	6,263	3,807	3,792	3,421	4,769
88	3,294	2,714	0,613	0,549	0,845	6,630
89	6,830	6,162	4,486	5,106	4,120	4,740
90	8,374	7,308	9,463	7,306	7,346	4,838
91	9,517	8,113	7,040	4,465	5,159	7,369
92	10,340	8,839	5,016	3,139	3,197	8,962
93	9,332	8,025	2,668	2,324	2,236	10,551
94	5,403	4,612	0,640	0,747	0,686	8,821
95	2,318	1,895	7,820	6,050	8,835	6,880
96	7,129	5,246	8,768	9,788	10,177	3,699
97	4,617	3,781	1,461	2,135	3,215	2,556
98	8,916	8,130	8,207	6,919	9,481	2,775
99	6,851	6,062	4,576	3,608	5,805	4,631
100	4,832	4,235	0,963	1,907	1,430	5,066
101	9,125	7,676	5,747	5,577	4,855	6,168
102	6,197	4,973	9,577	6,938	8,489	9,545
103	5,192	4,345	2,225	4,084	2,404	5,378
104	9,586	7,561	5,805	9,310	9,697	5,720
105	5,728	4,731	3,590	3,735	6,612	5,546
106	6,896	5,964	6,235	6,628	6,283	3,928
107	3,278	2,986	6,060	7,587	5,661	7,450
108	4,114	3,730	2,186	3,476	2,113	3,814
109	7,968	6,439	8,349	7,517	7,586	4,366
110	1,611	1,450	4,250	2,224	3,391	5,795
111	4,820	4,392	5,427	7,054	5,310	2,417
112	6,570	5,432	3,113	2,872	3,187	3,916
113	7,438	6,415	7,911	8,673	8,821	6,402
114	5,646	4,833	11,682	11,649	8,180	6,212
115	2,942	2,596	5,756	5,659	5,336	3,848
116	3,654	3,299	2,084	2,354	2,408	1,620

Valores estadístico $T^2$ de Hotelling						
	$T_{obs}^2$	$T_R^2$	$T_{res\ indiv}^2$	$T_u^2$	$T_e^2$	$T_x^2$
117	1,047	1,039	4,615	4,113	4,286	3,550
118	2,978	2,608	2,246	3,659	2,945	0,922
119	3,104	2,574	2,137	1,883	2,053	2,068
120	5,461	4,486	2,506	3,049	3,384	2,811
121	3,848	3,284	2,737	2,457	2,878	4,738
122	7,744	6,817	4,777	5,596	5,640	3,936
123	5,539	5,124	3,084	3,740	2,705	6,939
124	3,455	2,474	8,253	4,807	6,827	5,900
125	0,704	0,634	3,550	4,353	3,480	2,001
126	2,465	2,110	3,305	4,155	2,799	0,469
127	6,044	4,982	8,158	7,783	11,012	1,640
128	2,724	2,633	11,349	12,183	9,395	2,789
129	3,570	3,069	4,039	5,523	5,953	0,151
130	4,431	3,652	7,495	6,567	6,469	1,824
131	2,125	1,730	2,796	1,846	2,493	2,512
132	2,618	2,056	4,614	2,974	3,697	1,817
133	3,936	3,343	7,188	4,954	6,026	1,751
134	4,414	4,314	5,599	5,265	4,770	2,839
135	12,119	11,721	10,469	8,532	10,215	8,956
136	3,694	3,128	7,011	3,602	3,145	4,926
137	10,345	9,123	8,129	8,235	9,053	8,727
138	6,764	5,948	5,606	4,494	4,887	6,764
139	5,316	4,450	3,337	2,336	1,392	6,811
140	7,858	6,954	3,524	4,711	3,495	6,758
141	9,076	8,025	5,229	5,337	4,934	8,696
142	3,540	3,331	6,067	3,527	6,896	4,684
143	5,987	5,020	3,240	7,094	3,326	6,320
144	2,485	1,897	2,375	1,738	2,205	3,919
145	2,717	2,086	3,763	3,210	4,642	2,431
146	7,831	6,718	7,712	9,281	6,797	5,617
147	7,889	6,489	4,225	4,533	5,042	7,972
148	4,413	3,450	8,920	7,131	7,936	5,130
149	2,856	2,262	1,409	3,704	1,286	4,303
150	3,693	2,921	3,749	4,390	3,254	3,466
151	7,041	5,726	8,777	6,047	8,117	4,730
152	5,552	4,603	3,667	3,622	2,783	6,113
153	3,235	2,494	1,608	1,173	2,149	4,644
154	5,022	4,209	4,915	3,810	5,830	4,712
155	5,595	4,834	4,257	3,920	3,058	5,787
156	5,245	4,345	2,523	2,754	2,607	4,431

Valores estadístico $T^2$ de Hotelling						
	$T_{obs}^2$	$T_R^2$	$T_{res}^2$ <i>indiv</i>	$T_u^2$	$T_e^2$	$T_x^2$
157	8,167	7,238	10,752	10,397	11,716	6,036
158	5,785	4,837	2,018	4,030	2,252	6,311
159	2,519	2,115	2,584	1,745	1,946	3,525
160	3,427	2,982	3,523	4,864	3,793	4,134
161	6,895	5,768	6,069	5,849	5,942	3,851
162	0,737	0,655	2,866	2,296	1,792	6,181
163	3,415	2,992	4,370	3,748	4,123	1,874
164	0,303	0,253	2,576	2,469	1,836	3,152
165	4,954	4,556	6,468	7,011	6,565	0,445
166	2,797	2,363	5,469	5,165	4,749	2,386
167	5,497	4,635	3,307	4,865	5,167	0,837
168	2,160	2,009	11,519	9,808	9,549	3,409
169	3,646	2,957	5,230	5,202	3,821	0,719
170	2,803	2,469	4,126	3,762	2,395	1,164
171	3,928	3,408	3,117	2,744	4,074	1,746
172	3,848	3,310	3,160	3,937	3,590	2,031
173	6,535	5,250	4,993	3,889	4,182	3,174
174	4,578	3,372	3,820	4,455	4,510	5,409
175	1,849	1,473	1,033	0,531	1,089	5,258
176	11,100	9,469	12,901	13,113	12,290	3,175
177	6,260	5,157	5,115	5,012	5,156	6,213
178	3,790	3,526	9,149	4,585	5,726	4,691
179	2,953	2,695	5,721	5,962	4,325	2,414
180	6,376	5,397	8,115	9,493	6,809	2,190
181	9,312	7,932	6,452	6,944	5,948	3,971
182	4,735	3,620	5,607	6,398	10,504	6,203
183	3,141	2,479	0,873	2,252	1,477	6,330
184	3,896	3,307	2,449	2,478	1,598	5,215
185	1,782	1,410	1,137	1,886	2,865	5,637
186	5,806	5,242	6,130	6,840	4,462	3,855
187	3,990	3,353	0,851	1,855	1,494	4,365
188	4,136	3,753	3,240	2,465	2,310	5,289
189	5,773	5,453	6,848	4,142	5,869	4,421
190	2,664	2,310	3,809	6,319	4,410	4,301
191	3,502	3,090	3,109	2,193	3,483	3,297
192	3,077	2,917	4,191	4,002	3,900	3,538
193	4,052	3,740	4,255	3,792	2,742	2,970
194	5,405	4,666	3,861	3,650	4,399	3,459
195	4,037	3,859	3,833	3,576	2,435	4,658
196	1,334	1,229	1,777	3,107	3,589	3,914

Valores estadístico $T^2$ de Hotelling						
	$T_{obs}^2$	$T_R^2$	$T_{res}^2$ <i>indiv</i>	$T_u^2$	$T_e^2$	$T_x^2$
197	6,836	6,313	7,423	8,672	5,049	3,124
198	5,804	5,747	6,123	3,981	5,572	3,531
199	9,220	8,708	6,909	6,398	6,955	4,262
200	1,967	1,790	3,236	4,191	4,782	7,917
201	3,860	3,758	2,798	3,187	4,404	3,768
202	7,016	6,321	11,963	11,504	7,185	2,128
203	6,113	5,773	3,989	3,482	4,431	2,663
204	4,680	3,812	3,211	4,593	4,117	3,836
205	3,097	2,920	2,359	2,285	1,586	4,617
206	6,030	5,290	2,866	4,280	3,740	3,269
207	4,915	4,687	6,862	6,116	4,261	3,792
208	6,264	5,768	3,952	4,142	3,153	4,129
209	4,234	3,776	4,205	5,090	4,892	5,301
210	6,644	6,074	7,084	8,107	5,732	4,475
211	4,808	4,257	2,663	2,397	2,808	5,846
212	4,614	4,475	3,420	3,601	2,651	5,698
213	4,236	3,961	1,953	1,738	1,600	4,111
214	4,609	4,321	1,732	1,907	1,580	4,457
215	1,792	1,665	0,967	1,137	1,378	4,523
216	5,688	5,224	5,143	5,290	4,853	3,404
LSC	17,642	17,642	17,637	17,640	17,642	15,802